

# 社会人講座におけるネイピア数の近似計算について

梅 垣 敦 紀

本稿は、著者が2014年9月から2015年3月まで中日文化センターで開かれた「数学の世界に触れてみよう—体験を通して知る数学の歴史と理論—」という社会人講座の中で行ったネイピア数の近似計算の紹介を再構成し、加筆したものである。

キーワード：ネイピア数，自然対数の底，社会人講座，オイラー，近似計算

## 1 導入

本稿は、著者が2014年9月から2015年3月まで中日文化センターで行った「数学の世界に触れてみよう—体験を通して知る数学の歴史と理論—」という社会人講座の中で実行した数値実験と数学理論の解説を振り返りつつ、再構成し加筆したものである。

昨今の計算機の性能は凄まじく高くなっており、計算機を使うことさえできれば誰でも、前世紀までの数学者がかなりの年月をかけなくては得られなかったデータを、ほんの数分、悪くても数時間で得ることができる。よって、計算機実験をしながら、数学者が何を見て、何に気づき、何を考え、何を得たのかを追体験することがこの講座の目標であった。当然のことながら、著者が計算実験を見せるだけでなく、誰もが同じ実験ができるように留意したつもりである。その際、特別なコンピュータを用意しなくても、適切なソフトウェアをインストールするだけでよい。また、必要なソフトウェアはすべてフリーウェアであるので、費用はまったく掛からない。

講座は半年を掛け、

1. 数学実験で見つかる数理現象とは？
2. 確率と統計の世界
3. 関数1（微分と積分）
4. 関数2（三角関数・指数関数）
5. 素数1（整数と素数）
6. 素数2（素数のもつ不思議な性質）

という6回の枠で行ったが、その中から本稿では第3回の「関数1（微分と積分）」を取り上げる。特に、この回の主眼は微分や積分の概念を導入し、それらの性質を用いながら「ネイピア数（自然対数の底）」の近似計算を行うことにある。ネイピア数とは、17世紀後半から18世紀にかけて、スイスの数学者ベルヌーイやドイツの数学者オイラーによって数学の世界に導入された定数であり、数学の世界の様々な場面に現れる非常に重要な数であるとともに、神秘的かつ魅力的な性質を沢山持っている。

第5回の内容は既に前稿で取り上げており（[Ume] 参照），その際にいくつかの知識を仮定していた。講座とは順序が逆になってしまっているため違和感があるかも知れないが、前稿では仮定していた事実について多くの部分を補う立場で記したものが本稿である。

## 2 仮定する知識と計算機環境

あくまでも社会人講座であるため、現在のカリキュラムでいう中学くらいまでの知識は仮定しているが、高校の内容については、特段仮定していない。また、事実について、可能な限り証明を付けるように心掛けてはいるが、省いているものもある。その証明についても、可能な限り正確さを期してはいるが、完全な証明ではないものも含まれることを最初に注意しておく。(そのようなものでも、なるべく、証明の方針は大筋で外れてはいないように心掛けた。)

前稿 ([Ume]) で仮定した定義や命題について本稿で説明できたものは以下の通りであって、その対応を挙げておく。

前稿	本稿
定義 2.1	定義 7.1
命題 2.3	定義 8.1
命題 2.4	命題 3.3 + 定理 4.3
定理 2.5	命題 4.2

前稿の定義 2.2 の指数関数の定義については、別の機会に譲ることにする。

また、自然数、整数、有理数、実数、複素数全体の集合をそれぞれ  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  と書き表すことにする。

さらに、以下の計算実験では、OS が Windows 8.1 のコンピュータに、グラフ作画ツール gnuplot (version 5.0 patchlevel 1) ([PLOT] 参照) と計算ツール PARI/GP (version 2.7.4) ([PARI] 参照) を標準的にインストールした環境で行っているが、これより古い環境でも支障なく動く筈である。因みに、2016 年 6 月現在、gnuplot の最新バージョンは version 5.0.3 であり、PARI/GP の最新バージョンは version 2.7.6 である。また、gnuplot も PARI/GP も前述の通りフリーウェアであって、なおかつ、Windows 環境でなくても容易にインストールできる筈である。

## 3 数列と部分和

素数は無限個存在するので、素数からなる列

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$$

を考えてみると、この列は有限個で止まらない。このような列の全体を考えるときに、

$$a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots$$

のようにそれぞれの数に番号を振って**数列** ([英] sequence)  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  として考えた方が便利ながが多い。(数列の番号付けを 0 から始めたり、1 から始めたりすることがあるが、本質的に差はないので気にしなくてよい。)

**例 3.0.1.** 数列を表すために、再帰的に定義する場合がある。

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1, & (n = 0, 1) \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

で定義される数列は、

$$F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, \\ F_5 = 8, F_6 = 13, \dots$$

となる数列  $\{F_n\}_{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}}$  を意味する。(この数列は **Fibonacci 数列** と呼ばれる)。

**定義 3.1.** ある  $r \in \mathbf{Q}$  に対して、すべての  $n \in \mathbf{N}$  について

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

が成り立つ、即ち、隣り合う項の比が常に等しいような数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  のことを**公比** ([英] common ratio)  $r$  の**等比数列** ([英] geometric sequence) という。

**注意 3.1.1.** 公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  に対し、

$$a_n = r a_{n-1}$$

だから、

$$a_n = r a_{n-1} = r^2 a_{n-2} = \dots = r^{n-1} a_1$$

となることがわかる。

**注意 3.1.2.** 等比数列の類似として、数列  $\{a_n\}$  の項の差が常に一定の定数  $d$  である、即ち、 $a_{n+1} - a_n = d$  が成り立つとき、**等差数列**（【英】 arithmetic progression）という。

どんな数列  $\{a_n\}$  についても、和を考えることによって以下のような新しい数列  $\{S_n\}$  を作ることができる。

**定義 3.2.** 数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  と任意の  $n \in \mathbf{N}$  に対して  $a_1$  から  $a_n$  までの和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

を  $a_n$  の**部分和**（【英】 partial sum）という。

**命題 3.3.** 公比  $r \neq 1$  の等比数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  ( $a_n = a_1 r^{n-1}$ ) に対し、

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \end{aligned}$$

が成り立つ。

*Proof.*  $r \neq 1$  のとき、

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

なので、

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n$$

となり、上から下をそれぞれ引けば、

$$(1-r)S_n = a_1 - a_1 r^n$$

が得られる。  $\square$

**例 3.3.1.** 例えば、 $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$  で定まる

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{10}, a_3 = \frac{1}{100}, \dots$$

という数列  $\{a_n\}$  は、公比  $\frac{1}{10}$  の等比数列であるから、

$$S_n = 1. \underbrace{111 \dots 111}_{n-1 \text{ 個}}$$

となる。

## 4 極限と無限級数

ここまでの話はあくまで数列が有限のときの話である。しかし、すべての奇数からなる

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \dots$$

という数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  は、好きな自然数  $n$  に対して  $a_n$  を考えることができるから、10万だろうが100億だろうが  $n$  に好きな数を代入して構わない。この操作をどんどん繰り返したとき、 $a_n$  が無限に大きくなっていくのは容易に想像が付くであろう。このことを、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

と書き表し、数列  $\{a_n\}$  は**発散**（【英】 divergence）するという。

逆に、無限に大きくならないような数列を考えてみる。例えば、

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

となる数列、即ち、 $b_n = \frac{1}{n}$  とするとき数列  $\{b_n\}_{n \in \mathbf{N}}$  を考えてみればよい。この数列はどんどん小さくなっていき、最後には十分0に近くなってしまう。このようなとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

と書き表し、数列  $\{b_n\}$  は0に**収束**（【英】 convergence）するという。

今挙げた数列  $\{b_n\}$  の部分和  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  を考えてみる。 $n$  がどんどん大きくなったとき  $S_n$  はどういう振舞いをするのだろうか？それを考えるために、以下のように定義する。

**定義 4.1.** 数列  $\{a_n\}$  の部分和  $\{S_n\}$  の極限を

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

と書き表し、**無限級数**（【英】 infinite series）という。

(4)

社会人講座におけるネイピア数の近似計算について

**定理 4.2.**  $\frac{1}{n}$  の和は発散する、即ち、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

が成り立つ。

*Proof.* まず、和を

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} \\ &\quad + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} \right. \\ &\quad \quad \left. + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \right) \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

のように分割しておく。ここで、 $m < n$  のとき  $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$  が成り立つことに注意すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり、一般に  $a = 1, 2, \dots, 2^n - 1$  に対して  $\frac{1}{2^n + a} > \frac{1}{2^{n+1}}$  だから、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &> \underbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}}_{2^n \text{ 個}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} \\ &\quad + \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} \right) + \cdots \end{aligned}$$

が成り立つ。この式の右辺は無限に大きくなるから、左辺についても発散することがわかる。

□

この定理は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

が成り立つからといって、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  が有限の値に収束する訳ではないことを示している。しかしながら、考える数列によっては有限の値になることもあり得る。

**定理 4.3.** 公比  $r$  が  $|r| < 1$  を満たすような等比数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ( $a_n = a_1 r^{n-1}$ ) に対し、

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$$

が成り立つ。

**例 4.3.1.** 例えば、例 3.3.1 の数列  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  について、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

に注意すれば、命題 3.3 から、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{10}{9} \end{aligned}$$

となることがわかる。これと、 $S_n$  の表示を見比べれば、何の矛盾もないことがわかるであろう。

*Proof.* 命題 3.3 から、

$$S_n = \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$$

であったから、 $|r| < 1$  のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r} \\ &= \frac{a_1}{1-r} \end{aligned}$$

が成り立つ。

□

**注意 4.3.2.** 実数  $x \in \mathbf{R}$  の 10 進展開は、整数  $x_0$  と 0 から 9 までの自然数の列  $\{x_n\}$  を使って

$$y_n = \frac{x_n}{10^n}$$

で定義される数列  $\{y_n\}$  の部分

$$S_n = \sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^n x_k \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

の列の極限、即ち、無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

として表現していることにも注意して欲しい。例えば、 $\sqrt{2}$  や円周率  $\pi$  について、その近似値を小数点以下一桁ずつ増やしていくことは

$$a_0 = 3,$$

$$a_1 = 3.1 = 3 + \frac{1}{10},$$

$$a_2 = 3.14 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2},$$

$$a_3 = 3.141 = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3},$$

⋮

や

$$b_0 = 1,$$

$$b_1 = 1.4 = 1 + \frac{4}{10},$$

$$b_2 = 1.41 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2},$$

$$b_3 = 1.414 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3},$$

⋮

という有理数からなる数列を定義しているとみると、これらの数列の極限が  $\pi$  や  $\sqrt{2}$  の値だと思えることができる。即ち、 $\pi$  や  $\sqrt{2}$  は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{2}$$

として表現されているのである。逆にいえば、このような有理数からなる数列の極限の全体を、実数全体の集合  $\mathbf{R}$  の正体として捉えることもできる。

## 5 曲線の直線による近似

直線

$$y = ax + b$$

について、その係数  $a$  は傾きを表すのであった。2 次関数や一般の曲線の場合は一体どのように傾きを決めればよいのであろうか？この答えを最初に見つけたのは、イギリスのニュートン (Isaac Newton) (1642–1727) とドイツのライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz) (1646–1716) であった ([Lei], [New] 参照)。この考え方が現在では微分と呼ばれている。

**実験 1.** 曲線を直線で近似してみる。

与えられた曲線とその曲線上にある点 P で非常に近い直線を求めてみようというのである。簡単のために、

$$y = x^2$$

という放物線を最初に考えてみる。この放物線上の点 P として、 $(x, y) = (1, 1)$  をとり、点 P における傾き  $a$  を考えてみる。点 P と  $(x, y) = (2, 4)$  を通る直線を考えれば

$$y = 3x - 2$$

となり、これは点 P における傾き  $a$  より大きいので、 $a < 3$  となることがわかる。同様に、 $(x, y) = (1.5, 2.25)$  を通る直線を考えれば

$$y = 2.5x - 0.5$$

となるから、 $a < 2.5$  もわかる。一般に、点 P と  $(x_0, y_0)$  を通る直線が

$$y = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 1}(x - 1) + 1$$

で表されることは知っているであろう。今は点 P における傾き  $a = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 1}$  を知りたいだけだから、切片のことは忘れておく。ここで、 $x_0$  の値をどんどん 1 に近づけて対応する  $a$  の値を表にしてみると、

$x_0$	$a$
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001

となって、どんどん2に近付いていることがわかる。逆に、 $x_0$ を0から1にどんどん近付けて表にしてみると、

$x_0$	$a$
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.09	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999

となって、やはり2に近付いている現象が観察できる。よって、点Pにおける傾きは2とするのが妥当であるのがわかるであろう。ここまでの考察に基づいて、次のように微分係数を定義する。

**定義 5.1.**  $f(x)$  を  $\mathbf{R}$  上で定義される関数として、 $x = a$  においてその傾きの極限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = f'(a)$$

が存在するとき、 $a$  において**微分可能**（【英】differentiable）であるといい、 $f'(a)$  を  $a$  における**微分係数**（【英】differential coefficient）という。

このように曲線の傾きを定義すれば、ある点の近くで曲線を近似する直線を定義することができる。

**定義 5.2.** 関数  $f(x)$  に対し、その関数上の点  $(a, f(a))$  を通る直線

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

を  $f(x)$  の  $a$  における**接線**（【英】tangential line）という。

微分の方法が有効である点は、このように関数を直線で近似できることにあるだけでなく、この微分係数  $f'(a)$  が改めて関数を定めることにある。

**定義 5.3.** 関数  $f(x)$  に対し、任意の点  $a \in \mathbf{R}$  について微分可能であるとき、各点  $a$  について微分係数  $f'(a)$  を対応させる関数  $f'(x)$  を**導関数**（【英】derived function）という。

**定理 5.4.** 2次曲線  $f(x) = x^2$  の導関数は  $2x$  である、即ち、

$$f'(x) = 2x$$

が成り立つ。

*Proof.* 任意の  $x = a$  における傾きの関数について、 $x \neq a$  のとき、

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a$$

だから、その極限値は

$$\lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a$$

となり存在する。よって、どの点でも微分可能である。したがって、導関数が  $f'(x) = 2x$  で与えられることがわかる。□

**注意 5.4.1.** より一般に、 $y = x^n$  ( $n \neq 0$ ) の導関数は  $f'(x) = nx^{n-1}$  となる。

**定理 5.5.** 微分可能な関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  と  $a, b \in \mathbf{R}$  に対し、

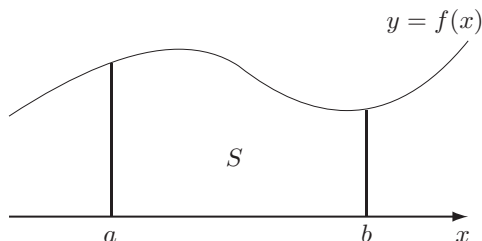
1.  $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$
2.  $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3.  $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

が成り立つ。

**注意 5.5.1.** 1 の性質を**線形性**、3 の性質を**連鎖律**という。また、連鎖律は俗に「ライブニッツルール (Leibniz Rule)」と呼ばれる。

## 6 積分

微分を理解した後は、積分も紹介しよう。  
 $y = f(x)$  という関数を考えて、 $x = a, x = b$ ,  
 $y = 0$  という 3 本の直線と  $f(x)$  で区切られ  
 た部分の面積  $S$  を考える。



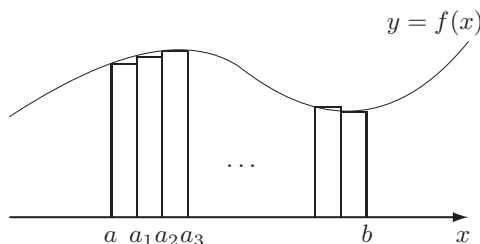
$a \leq x \leq b$  を満たす実数  $x$  の集合を区間  $[a, b]$   
 で表す。区間  $[a, b]$  を  $N$  等分すれば、

$$a = a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N-1}, b = a_N$$

という  $(N+1)$  個の点が定まる。このとき、各  
 点の幅は  $h = \frac{b-a}{N}$  であって、 $a_n$  は  $a = a_0$   
 を初項とする公差  $h$  の等差数列、即ち、

$$a_n = a_0 + nh$$

となる。ここで、下の図の長方形を考えると、



一つ一つの長方形の面積は

$$h \times f(a_n)$$

で表せる。このすべての長方形の和

$$\begin{aligned} S_N &= h \sum_{k=0}^{N-1} f(a + kh) \\ &= \frac{b-a}{N} \{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) \\ &\quad + \dots + f(a+(N-1)h)\} \end{aligned}$$

を考えると、 $N$  等分する幅をどんどん小さくす  
 れば、本来の面積  $S$  に近い値を求められるこ

とがわかるであろう。したがって、面積  $S$  を  
 $N \rightarrow \infty$  としたときの  $S_N$  の極限として把握  
 する、即ち、

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$$

と捉えることこそ、積分の考え方である。ま  
 た、上の面積  $S$  を

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

と書き表す。微分のとくと同様に、この積分  
 を考えることによって生じる新しい関数を考  
 える。

**定義 6.1.** 関数  $f(x)$  に対し、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

と表すことができる関数  $F(x)$  を**原始関数**  
 (【英】 primitive integral) という。

**例 6.1.1.**  $f(x) = 2x$  のとき、 $0 < a < b$  を  
 満たす  $a, b$  に対して、 $\int_a^b f(x) dx$  が表す台形  
 の面積を計算すれば、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2}(2a + 2b)(b - a) \\ &= b^2 - a^2 \end{aligned}$$

となるから、 $F(x) = x^2$  とおけば、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

と表すことができる。したがって、 $f(x) = 2x$   
 の原始関数は  $F(x) = x^2$  であることがわか  
 る。(但し、 $C$  を実数とすると  $F(x) = x^2 + C$   
 の形の関数はすべて原始関数である。)

この原始関数  $F(x)$  を微分すれば元の関数  
 $f(x)$  が得られることは驚くべき事実であろう。

**定理 6.2.**  $f(x)$  の原始関数  $F(x)$  に対し、

$$F'(x) = f(x)$$

が成り立つ。

**例 6.2.1.** 定理 5.4 から、原始関数  $F(x) = x^2$   
 を微分すれば  $f(x) = 2x$  となることがわかる。



## 7 積分とネイピア数 $e$

今度は、 $y = \frac{1}{x}$  のグラフを考えてみる。このグラフが点  $(1, 1)$  を通ることはすぐに確認できるのであろう。

**実験 2.**  $x_0$  を動かしていつ

$$S = \int_1^{x_0} \frac{1}{x} dx = 1$$

を満たすのかを考察する。

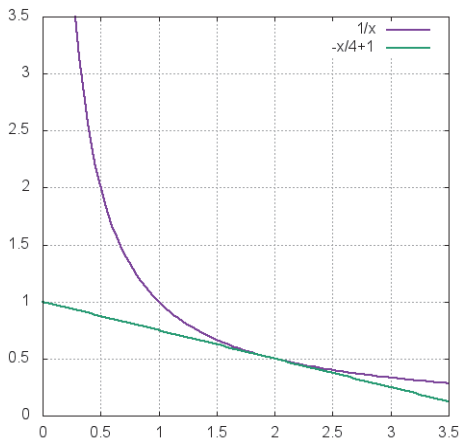
$y = f(x) = \frac{1}{x}$  とするとき、注意 5.4.1 から、 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  が成り立つので、点  $(2, \frac{1}{2})$  における接線は

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

と表すことができる。ここで、 $y = \frac{1}{x}$  とその接線  $y = -\frac{1}{4}x + 1$  のグラフを同時に描いてみる。そのためには、gnuplot というソフトウェアを起動後、

```
gnuplot> set xr[0:3.5];\
> set yr[0:3.5];
gnuplot> set grid;\
> set size square;
gnuplot> plot 1/x, -x/4+1;
```

と入力すればよい（入力の際の注意や上記のサンプル中のオプションの意味については § 11 を参照）。すると、別の window が開いてグラフが表示される。



まず、 $x_0 = 2$  としてみる。このとき、4 点  $(1, 0), (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (2, 0)$  を頂点とする台形を考えれば、その面積は  $\frac{3}{4}$  だから、 $S < \frac{3}{4} < 1$  が成り立つ。したがって、 $x_0 > 2$  であることがわかるであらう。

同様に、4 点  $(1, 0), (1, \frac{3}{4}), (3, \frac{1}{4}), (3, 0)$  を頂点とする台形を考えれば、その面積は

$$\int_1^3 \left(-\frac{1}{4}x + 1\right) dx = 2 \times \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{2} = 1$$

となり、 $1 < \int_1^3 \frac{1}{x} dx$  となるから、 $x_0 < 3$  がわかる。

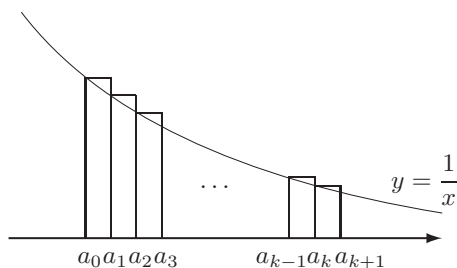
**定義 7.1.** 実際に

$$S = \int_1^{x_0} \frac{1}{x} dx = 1$$

を満たす実数  $x_0$  ( $2 < x_0 < 3$ ) を **ネイピア数**（【英】Napier constant）といい、 $e$  で表す。

**注意 7.1.1.** スコットランドのネイピア（【英】John Napier）(1550–1617) に因んで名付けられたこの  $e$  は、日本の高校の教科書では**自然対数の底**と呼ばれている。但し、 $e$  という記号はこの定数を最初に  $e$  と表した**オイラー**（Leonhard Euler）(1707–1783) からの慣習であり、**オイラー数**とも呼ばれる（定義 8.1 参照）。

さらに、前節でやった積分の考え方を使って、より詳しく  $x_0$  の近似を行ってみる。そのために、 $f(x) = \frac{1}{x}$  として、 $\frac{1}{N}$  の幅の長方形で面積を近似するために、 $a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{n}{N}$  で定まる数列  $\{a_n\}$  を考える。





ここで、 $a_n$  と  $a_{n+1}$  を結ぶ線分を底辺とする長方形の面積は

$$f(a_n) \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N \left(1 + \frac{n}{N}\right)} = \frac{1}{N+n}$$

で表せることに注意しておく。このとき、

$$\sum_{n=0}^m \left( f(a_n) \times \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^m f(a_n) \doteq 1$$

となる最小の自然数  $m \in \mathbf{N}$  が求められれば、この  $m$  に対して  $a_m$  がネイピア数  $x_0$  の近似値になることが図からもわかるだろう。メモ帳などのテキストエディタを使って、

```
napier(N)={
S=0;n=0;
while(S<1,
S=S+1/(N+n);n++;);
print(1+n/N);
}
```

というファイルを用意して、デスクトップに「napier.gp」というファイル名で保存しておく。さらに、PARI/GP を起動して

```
gp> \r $Home/Desktop/napier.gp
```

と入力すれば、今作ったファイルを読み込むことができる。但し、最初にある「gp>」はプロンプトなので、「\r」から入力すればよい。 $N = 10$  のときなら、

```
gp> napier(10)
```

と入力すれば、 $x_0 \doteq \frac{27}{10} = 2.7$  という結果が得られる。積分の考え方と同様に、 $N$  の値を大きくしていけば、より厳密な値を近似計算することができる。

**注意 7.1.2.** 上の操作を実際に行ってみると、 $N = 100000$  くらいまでなら比較的速やかに計算でき、 $e \doteq 2.71828$  という近似値が求まる。しかしながら、それ以上になると非常に時間が掛かる。

## 8 ネイピア数と微分

**実験 3.**  $y = e^x$  の  $x = 0$  での微分係数を実験的に求めてみる。

$e^x$  の  $x = 0$  での微分係数は

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

で求められるから、

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, \dots, x_n = \frac{1}{2^n}$$

という数列  $\{x_n\}$  を考えて、 $n$  を大きくしたときに  $\frac{e^x - 1}{x}$  がどんな値に近づくのかを調べてみる。 $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$  であることを注意しておく。

```
diffe(t)={
ee=t;k=1/2;
for(i=0,10,
print((ee-1)/k^i);
ee=sqrt(ee);)
}
```

というテキストファイルを「diffe.gp」という名前でデスクトップに保存して、

```
gp> \r $Home/Desktop/diffe.gp
```

として読み込む。例えば、注意 7.1.2 で得られるネイピア数の近似値  $t = 2.71828$  について

```
gp> diffe(2.71828)
```

とすれば、10 ページの表 1 のようなデータが得られる。もちろん、これは証明にはなっていないが、最初に与える近似値  $t$  の精度をあげて実験を繰り返せば、微分係数が 1 に近づいていく様子が見えるであろう。

実際、ネイピア数  $e$  を以下のように定義することもできる。

**定義 8.1.**

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

を満たす実数  $e$  をネイピア数という。

**注意 8.1.1.** ネイピア数を最初に考えたのはベルヌーイ (Jacob Bernoulli) だとされており, その定義は高校の教科書の通り

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (8.1)$$

であった. この社会人講座では, この極限值としてではなく, 視覚的にネイピア数を捉えるために定義 7.1 を採用した.

**注意 8.1.2.** ベルヌーイの (8.1) 式の定義では具体的な近似値を求める上では収束が遅いことにも触れておく.  $e \approx 2.7$  と小数点以下 1 桁が近似できるのは  $n = 74$  のとき,  $e \approx 2.718$  と小数点以下 3 桁が近似できるのは  $n = 4822$  のとき,  $e \approx 2.71828$  と小数点以下 5 桁が近似できるのは  $n = 743325$  のときで真の値に収束している様子がわかりづらい.

**実験 4.** (8.1) 式の  $e$  の定義の収束の速さを体感してみる.

そのためには,

```
napier2(n)={
  print((1.0+1/n)^n)
}
```

というテキストファイルをデスクトップに「napier2.gp」というファイル名で準備して,

```
gp> \r $Home/Desktop/napier2.gp
gp> napier2(74)
```

等とすればよいであろう.

定義 8.1 の  $e$  の性質から, 指数関数  $e^x$  の微分を一般的に求めることができる.

**定理 8.2.** 指数関数  $e^x$  の微分について

$$(e^x)' = e^x$$

が成り立つ.

*Proof.*  $f(x) = e^x$  とする.

$$e^{a+h} - e^a = e^a(e^h - 1)$$

だから,  $x = a$  における微分係数について定義 8.1 に注意すると,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} \\ &= e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^a \end{aligned}$$

が成り立つ. □

表 1: ネイピア数の近似値を用いた  $x = 0$  での微分係数の実験データ

0	1.2974414323835988338265126667285321357
1	1.1361008030478520457895510190147266662
2	1.0651868623192557294540903244894613261
3	1.0319106266506748406803057350474973420
4	1.0157883459662854345755568463916828688
5	1.0078526663024344479705092013046202821
6	1.0039157644969442757798185757741913496
7	1.0019549953315733905165680622706800013
8	1.0009765246256635549333524419172363554
9	1.0004877669246060428116432919922401587

## 9 関数を直線だけでなく曲線でも近似してみる

§ 5 で、関数  $f(x)$  を直線で近似するためには微分の考え方を使えばよいことを確認した。  $x = a$  における接線は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

であった。よって、  $x = a$  の近くでは

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a) \quad (9.1)$$

が成り立つ。

**実験 5.** 今度は、直線だけでなく 2 次曲線も使って、関数  $f(x)$  のより良い近似を行う。

即ち、

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a) + g(x) \quad (9.2)$$

となるような 2 次関数  $g(x)$  を見付けることを試みるのである。(9.2) 式で  $x = a$  とすれば、

$$f(a) \doteq f(a) + f'(a)(a - a) + g(a),$$

即ち、  $g(a) \doteq 0$  となるので、  $g(a) = 0$  が成り立たなくてはならない。また、(9.2) 式を微分したものと考えれば、

$$f'(x) \doteq f'(a) + g'(x)$$

となるから、  $x = a$  を代入すれば、  $g'(a) = 0$  も成り立つ筈である。したがって、求めたい 2 次関数  $g(x)$  は定数  $k$  を使って

$$g(x) = k(x - a)^2$$

と表すことができる筈である。このとき、  $g'(x) = 2k(x - a)$  なので、

$$f'(x) \doteq f'(a) + 2k(x - a)$$

がいえる。これと、(9.1) 式の  $f(x)$  を  $f'(x)$  に置き換えたもの（これは  $f'(x)$  の  $x = a$  における接線に他ならない）

$$f'(x) \doteq f'(a) + f''(a)(x - a)$$

とを比較すれば、  $2k = f''(a)$  となる。よって、

$$g(x) = \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

だから、

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

となることがわかる。

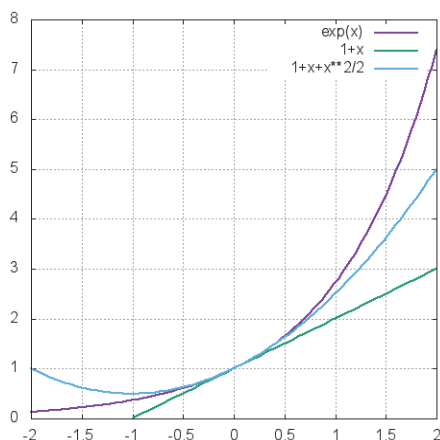
**例 9.0.1.** 指数関数  $f(x) = e^x = \exp(x)$  について今の考え方を実践してみる。  $(e^x)' = e^x$  であるから、  $a = 0$  のとき

$$f(x) \doteq 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

となる筈である。よって、  $y = \exp(x)$  と  $x = a$  における接線  $y = 1 + x$  と、さらに、右辺の 2 次式のグラフを同時に描いてみる。gnuplot で

```
gnuplot> set xr[-2:2];\
> set yr[0:8]; set grid;\
> set size square;
gnuplot> plot exp(x), 1+x,\
> 1+x+x**2/2;
```

と入力すれば、



といったグラフを見ることができる。このグラフを見れば、  $x = 0$  の付近では、緑色の接線より水色の 2 次関数の方が紫色の  $y = e^x$  により近いことがわかるであろう。(gnuplot では冪乗  $x^n$  を「 $x**n$ 」で表すことを注意しておく (§ 11 参照).)

## 10 テイラー展開

前節で行った関数を曲線で近似する考え方は、別に2次式に限った話ではなく、何次式でも考えることができる。即ち、元の関数により近い3次曲線や4次曲線を見付けようと考えるのである。これを無限に繰り返したものを考えれば、イギリスの数学者テイラー (Sir Brook Taylor) (1685–1731) が生み出したテイラー展開が現れる ([Tay] 参照)。

**定義 10.1.** 関数  $f(x)$  を  $x = a$  で

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \end{aligned}$$

の形に展開したものを**テイラー展開** (【英】Taylor expansion) という。但し、 $f^{(n)}(x)$  は  $f(x)$  を  $n$  回微分した関数を意味する。

**注意 10.1.1.** テイラー展開で、 $a = 0$  のとき、即ち、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \end{aligned}$$

の形の展開を特に、**マクローリン展開** (【英】Maclaurin expansion) ともいうことがある。

**実験 6.** テイラー展開をすることで  $x = 0$  の近くで本来の関数に近付いていく様子を

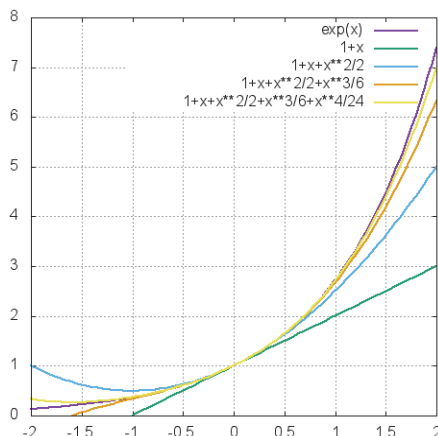
$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

に対して確認してみる。

gnuplot を使って、以下のようにタイプする。

```
gnuplot> set xr[-2:2];\
> set yr[0:8]; set grid;\
> set size square;
gnuplot> plot exp(x),\
> 1+x,\
> 1+x+x**2/2,\
> 1+x+x**2/2+x**3/6,\
> 1+x+x**2/2+x**3/6+x**4/24;
```

このとき、次のようなグラフが表示される。



このグラフを見れば、接線の緑色から、2次・3次・4次式の水色・オレンジ色・黄色と多項式の次数を大きくするごとに、どんどん紫色の本来の曲線  $f(x) = e^x$  に近付いている样子がわかるであろう。

**注意 10.1.2.**  $a = 0$  のとき、

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (10.1)$$

となる。注意 4.3.2 と見比べると何か似ていると感じるのではないかと無限級数の形で表すことは、近似のための方法の1つであることが改めて実感できるであろう。(10.1) 式に  $x = 1$  を代入すれば、

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (10.2)$$

となるので、具体的な近似値  $e = 2.7\dots$  も早く簡単に求めることができる。実際、 $0! = 0$  に注意すると、

$m$	$\sum_{n=0}^m \frac{1}{n!}$
1	2
2	$\frac{5}{2} = 2.5$
3	$\frac{8}{3} = 2.6666\dots$
4	$\frac{65}{24} = 2.7083\dots$
5	$\frac{163}{60} = 2.7166\dots$
6	$\frac{1957}{720} = 2.7180\dots$

という値を求めることができる。オイラー自身が 1748 年に、

$$e \doteq 2.71828182845904523536028$$

という近似値を求めているが、その手法もこの方法であったと考えられる ([Eul] 参照)。因みに、(10.2) 式の収束がいくら早いとはいえ、この値を得るためには少なくとも  $m = 23$  までは計算しなくてはならない。オイラーの計算力の凄まじさを感じざるを得ないであろう。

**実験 7.** オイラーの行った方法で  $e$  の近似計算をしてみる。

そのために、PARI/GP を使う。

```
napier3(N)={
S=0.0;
for(n=0,N,S=S+1/n!;print(S))
}
```

というテキストファイルを「napier3.gp」というファイル名で準備して、

```
gp> \r $Home/Desktop/napier3.gp
gp> napier3(23)
```

等とすればよいであろう。「napier3.gp」の 2 行目にある「S=0.0」を「S=0」に変えれば、有理数の値として計算できることも注意しておく。）

**注意 10.1.3.**  $f(x) = \sin(x)$  を  $x$  で次々に微分していくと、

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & n = 4k \text{ のとき,} \\ \cos(x) & n = 4k + 1 \text{ のとき,} \\ -\sin(x) & n = 4k + 2 \text{ のとき,} \\ -\cos(x) & n = 4k + 3 \text{ のとき,} \end{cases}$$

となる。 $\sin(0) = 0$ ,  $\cos(0) = 1$  に注意すると、そのテイラー展開は

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \dots \end{aligned}$$

となることがわかる。

同様に、 $\cos(x)$  についても

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

とかける。

$i$  を虚数単位として、(10.1) 式に  $x = i\theta$  を代入すれば、

$$\begin{aligned} \exp(i\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \right) \\ &\quad + i \left( \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \right) \end{aligned}$$

となるから、次のことが確認できる。

**定理 10.2** (Euler). 指数関数と三角関数の間に、

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

という関係が成り立つ。

$\theta = \pi$  とすれば、次の事実もわかる。

**系 10.3.**

$$e^{i\pi} = -1$$

が成り立つ。

## 11 gnuplot について

今回使った gnuplot はグラフを描くツールとしては定番のフリーソフトであって、公式サイトから自由に無料でダウンロードしてインストールできる ([PLOT] 参照). 自分が思い描くような綺麗なグラフを描くには少し訓練が必要だが、数学を考える上でも視覚化することは非常に大切であって、手でグラフを作るよりはるかに簡単かつ正確にできる. gnuplot の中で良く使いそうな関数を表にしておく.

関数	戻り値
<code>x**k</code>	$x^k$
<code>exp(x)</code>	$x$ の指数関数
<code>log(x)</code>	$x$ の自然対数 ( $\log_e(x)$ )
<code>log10(x)</code>	$x$ の常用対数 ( $\log_{10}(x)$ )
<code>sqrt(x)</code>	$x$ の平方根 ( $\sqrt{x}$ )
<code>abs(x)</code>	$x$ の絶対値 ( $ x $ )
<code>sin(x)</code>	$x$ の正弦
<code>cos(x)</code>	$x$ の余弦
<code>tan(x)</code>	$x$ の正接

本稿で紹介したサンプルを入力する際、「gnuplot>」や行頭の「>」の部分は最初から表示されているプロンプトと呼ばれるもので入力の必要はない. また、「\」と入力した際に「¥」と表示されるかも知れないが、気にしなくてよい. さらに、本稿の中で用いたオプションの意味は以下の通りである.

- `set xr[a:b]`  
グラフを描く  $x$  の範囲を  $a \leq x \leq b$  に制限する.
- `set yr[a:b]`  
グラフを描く  $y$  の範囲を  $a \leq y \leq b$  に制限する.
- `set grid`  
グラフに柵目を描く.
- `set size square`  
グラフの縦横比を 1:1 にする.

## 参考文献

- [Eul] Leonhard, Euler, *Introductio in analysin infinitorum I*, 1748
- [Lei] Leibniz, Gottfried Wilhelm, *Nova Methodus pro Maximis et Minimis*, 1684
- [New] Newton, Isaac, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687
- [Tay] Taylor, Brook, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, London, 1715
- [Ume] Umegaki, Atsuki, 社会人講座における素数定理の取扱いについて, 愛知大学一般教育論集, **50**, 2016, 13–28
- [PARI] PARI/GP ホームページ  
<http://pari.math.u-bordeaux.fr>
- [PLOT] gnuplot ホームページ  
<http://gnuplot.info>

Title: **Introduction to compute approximate values of Napier constant at a course of adult education**

Author: **UMEGAKI, Atsuki**