重いクォークを含む重粒子の質量関係式

松　井　吉　光

要　　約：重いクォークを含むハドロンは近年，エキゾティックハドロンと呼ばれる，従来のクォーク模型で想定されていないハドロンの発見により注目されている。また，CPの破れなどの標準模型のパラメータを決める上で，重いクォークを含むハドロンについて精密な測定が引き続き行われている。また，より精密な測定により，標準模型では説明できない現象の探求も継続的に行われている。本論文では，その重いクォークを含むハドロンのうち，重粒子（バリオン）について重いクォークの有効理論とSkyrme模型を組み合わせた模型を用いて導出された質量関係式について議論した。

キーワード：重いクォークの有効理論，Skyrme模型，重粒子（バリオン），質量関係式

1　はじめに

ハドロンとは，素粒子の標準模型において，クォーク（q）またはその反粒子である反クォーク（$\bar{q}$）で構成された粒子のことである。クォーク・反クォークからハドロンが形成されるためには，ハドロン内に構成粒子を留めておく力が必要であり，それが強い相互作用である。その強い相互作用を記述する基本理論として量子色力学（QCD）と呼ばれている理論が提唱されている。QCDの特徴の一つが，近づけば近づくほど（エネルギーが高くなるほど）力が弱くなり，逆に遠ざかれば遠ざかるほど（エネルギーが低くなるほど）力が強くなるという，いわゆる漸近的自由性を持っていることである。その漸近的自由性は，高エネルギー領域においてQCDが力が弱いときに適用可能な摂動論によって取り扱えることを保証しており，それによってQCDはその領域におけるハドロンの諸現象の解析に重要な役割を果たし，実験的にもその正しさが裏付けられている。しかし，低エネルギーの領域においてはQCDの力が強くなってしまうため，摂動論的手法を用いることが不可能となり，そのことがハドロンの強い相互作用の低エネルギーでの振舞いをQCDを用いて直接解析することを困難にしている。そこで，QCDの持つ対称性などの性質を基に有効理論（近似理論）が作られ，その有効理論が低エネルギーにおけるハドロンの物理の解析に重要な役割を果たしてきた。

一方，実験の分野ではヨーロッパにあるLarge Hadron Collider（LHC）のLarge Hadron Collider beauty experiment（LHCb）グループ [1] 等により，高エネルギー領域における重いクォークを含むハドロンの解析が

進んだ。これは少し前にエギゾティックハドロンと呼ばれる，従来のクォーク模型で想定されていた中間子（$q\bar{q}$）や重粒子（qqq）と異なるクォーク２個・反クォーク２個（$qq\bar{q}\bar{q}$）で構成される中間子や，クォーク４個・反クォーク１個（$qqqq\bar{q}$）で構成される重粒子が発見され，注目されたことによるものであろう。軽いクォークだけで構成されるハドロンでは，エギゾティックハドロンは明確に区別して発見することが困難なため，エギゾティックハドロンは重いクォークを含むハドロンについての研究ではじめて存在が明らかになった。

本論文ではQCDの有効理論である，重いクォークの有効理論 [2, 3, 4] と重粒子についての1/Nc展開理論 [5] – [9] の有効理論とされているSkyrme模型 [10] を組み合わせた模型を用いて，LHCb等で近年測定が進んだ重いクォークを１個含む重粒子（ここからは重い重粒子と記述する）の性質のうち，質量についての議論する。

２　重いクォークの有効理論

重いクォークの有効理論はQCDの近似理論で，扱う対象はQCDの典型的なエネルギースケールΛ_{QCD}（$\Lambda_{QCD} \cong 100 \sim 300$MeV）より十分重いクォークを１個含むハドロンである [2, 3, 4]。そのようなハドロンは強い相互作用による重いクォーク，軽いクォーク及びグルーオンの束縛状態で，低エネルギー領域において軽いクォークとグルーオンの持つエネルギー（Λ_{QCD}）は重いクォークであるチャームクォーク（c）やボトムクォーク（b）の質量$m_c \simeq 1.27$ [GeV], $m_b \simeq 4.18$ [GeV] [11] に比べて十分小さいと考えられる。このとき，Λ_{QCD}/m_Q（m_Qは重いクォークの質量m_cやm_b）はよい展開係数となるので，これを展開係数としてQCDラグランジアンを展開し，その結果得られたものが重いクォークの有効理論のラグランジアンである。クォークの質量を無限大にとる極限$m_Q \to \infty$（重いクォークの極限）では，重いクォークのスピンとフレーバー（種類）について理論は対称となり，この対称性が重いクォークを１個含むハドロンの物理の解析に大きな役割を果たしてきた。

３　Skyrme模型

一方，低エネルギーにおいては，QCDには摂動展開に用いる小さな展開パラメーターが存在しない。そこでカラーの自由度N_cを大きいと考えて，その逆数$1/N_c$を展開パラメーターとする方法がʼtHooftによって提唱された [5]。そして，この展開を用いることにより，低エネルギーにおける重粒子の振舞いの定性的な議論ができることがWittenによって示された [6]。さらに，重粒子の性質についての定量的な議論に$1/N_c$展開が利用できることがDashen, Manohar, Jenkinsによって示された [7, 8, 9]。

$1/N_c$展開を行う上でいくつかのことが暗に仮定されている。原理的な仮定としては，クォークの閉じ込めや，カイラル対称性の自発的破れなどのQCDの持つ性質が，N_cが十分大きい極限においても保たれるということがあげられる。また，N_cが十分大きい場合に存在するハドロンは，中間子（$q\bar{q}$）とN_c個のクォークからできた重粒子で，最も低エネルギーの領域で存在するハドロンは，カイラル対称性の自発的破れによって現れる擬Goldstoneボゾンと考えられているπ中間子とN_c個の軽いクォークからできた重粒子である，ということも仮定されている。

大きいN_cの極限において，QCDには重粒子が直接現れてこなくなり，QCDは中間子の有効理論と同等になる [5]。この極限において，重粒子はその有効理論のソリトン解として現れえることがWittenによって示された [6]。大きいN_cの極限における中間子の有効理

論はQCDから直接導かれていない。そこで，その低エネルギーにおける特徴をよく捉えていると考えられているカイラル対称性の自発的破れについての非線形σ模型の，ソリトン解として重粒子を捉えたのが本論文で扱うSkyrme模型である [10]。

4　重いクォークを含む重粒子の模型

この節では，本論文で扱う重い重粒子（重いクォークを1個含む重粒子）の模型について述べる。本論文で扱うのは，重い重粒子をSkyrme粒子（カイラル$SU(2)$ ソリトン）と重いクォークを1個含む中間子（重い中間子）との結合状態と考える模型である [12, 13]。

この模型の有効ラグランジアンは，$SU(2)_L\times SU(2)_R$カイラル変換とパリティー変換に対する不変性を持つように構成され，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&\frac{1}{16}f_\pi^2 tr(\partial_\mu U^\dagger\partial^\mu U)\\&+\frac{1}{32e^2}tr\left[(\partial_\mu U)U^\dagger,(\partial_\nu U)U^\dagger\right]^2\\&-iTr\bar{H}_a v_\mu\partial^\mu H_a+\frac{i}{2}Tr\left(\bar{H}_a H_b v^\mu(U^\dagger\partial_\mu U)_{ba}\right)\\&+\frac{ig}{2}Tr\left(\bar{H}_a H_b\gamma^\mu\gamma_5(U^\dagger\partial_\mu U)_{ba}\right)+\cdots\end{aligned}\tag{1}$$

で与えられる [12]–[15]。ここで，$\cdots$ には$U(x)$の高次の微分を含んだ項や，$1/m_Q$についての高次の項が含まれる。$U(x)$は$SU(2)$カイラル場であり，$H_a(x)$は重い中間子をまとめて表現した場で

$$H_a(x)=\frac{1+\not{v}}{2}\left\{P^*_{a\mu}(x)\gamma^\mu-P_a(x)\gamma_5\right\}\tag{2}$$

で定義される。$P^*_{a\mu}(x)$と$P_a(x)$は，軽い自由度（重いクォークを除いた重い中間子の構成要素）のスピン・パリティが$S_\ell^P=1/2^-$の二重項を構成する，それぞれ重いクォークを1個含むベクトル中間子，擬スカラー中間子の場を表し，aはカイラル変換についての添字である。この重い中間子の場$H_a(x)$についてのアイソスピン演算子I_H^kは

$$I_H^k H=-H\frac{\tau^k}{2}\tag{3}$$

で，重い中間子の軽い自由度についてのスピン演算子$S_{\ell H}^k$は

$$S_{\ell H}^k H=-H\frac{\sigma^k}{2}\tag{4}$$

である。また，$-Tr\bar{H}H$は重い中間子の個数演算子で，この模型が対象としている系では常に+1になる。

クォークのカラーの自由度N_cと重いクォークの質量m_Qが十分大きいとする極限をとると，有効ラグランジアンに含まれている$U(x)$の高次の微分を含んだ項や，Λ_{QCD}/m_Qについての高次の項は無視することができる。$U(x)$の時間微分は空間微分に比べて$1/N_c$のオーダーの大きさになるので，これもこの極限では無視することができる。したがって，この極限において，重い中間子の静止系 $(v^\mu)=(1,\vec{0})$ における相互作用ハミルトニアンは

$$H_I=-\frac{ig}{2}\int d^3\vec{x}Tr\left[\bar{H}H\gamma^j\gamma_5\left(U^\dagger\partial_j U\right)\right]+\cdots\tag{5}$$

と書ける。この相互作用ハミルトニアンにソリトン解

$$U(x)=A(t)U_0(\vec{x})A^{-1}(t)\tag{6}$$

$$U_0(\vec{x})=exp\left[iF(r)\hat{\mathbf{x}}\cdot\vec{\tau}\right]\tag{7}$$

$$F(r)=-\pi+rF^{'}(0)+\frac{1}{3!}r^3F^{'''}(0)+\cdots\tag{8}$$

と式（3），（4）を代入し，重い中間子が原点に，ソリトンが位置$\vec{x}$にあるとすると，相互作用ポテンシャル演算子

$$\begin{aligned}\hat{V}_I(\vec{x})=&gS_{\ell H}^j I_H^k Tr\left[A\sigma_i A^{-1}\tau_k\right]\\&\times\left[\delta_j^i\left\{F^{'}(0)-\frac{2}{3}r^2\left[F^{'}(0)\right]^3+\frac{1}{6}r^2F^{'''}(0)\right\}\right.\\&+x^i x_j\left\{\frac{2}{3}\left[F^{'}(0)\right]^3+\frac{1}{3}F^{'''}(0)\right\}\\&\left.+\varepsilon_{ijk}x^m\left[F^{'}(0)\right]^2\right]+\mathcal{O}\left(|\vec{x}|^3\right)\end{aligned}\tag{9}$$

が得られる。

ソリトンの質量M_{sol}はf_π^2のオーダーの量，即ちN_cのオーダーの量なので，N_cが十分大きい極限をとると質量M_{sol}は無限大になる。そのとき，相互作用ポテンシャルに最も寄与するのは，ソリトンが重い中間子の位置にある場合であると考えられる。したがって，そのときの相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = gS^j_{\ell H} I^k_H Tr\left[A\sigma_i A^{-1}\tau_k\right] F'(0) \tag{10}$$

のように簡単になる。この相互作用ハミルトニアン（10）は全アイソスピン演算子I，ソリトンのスピンと重い中間子の軽い自由度のスピンを合わせたスピン演算子S_ℓと交換可能である。したがって，IとS_ℓの固有状態

$$|\, I, a, S_\ell, m; R, I_H, S_{\ell H}\rangle =$$

$$|R, b, n)|\, I_H, c, S_{\ell H}, p\,\} \tag{11}$$

$$\times \left(\begin{array}{cc|c} R & I_H & I \\ b & c & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} R & S_{\ell H} & S_\ell \\ n & p & m \end{array}\right)$$

を用いて議論することができる。ここで$|R, b, n)$はスピン，アイソスピンが$S = I = R$, $I_3 = b$, $S_3 = n$ のソリトンを表し，$|\, I_H, c, S_{\ell H}, p\}$ はスピン，アイソスピンが$I = I_H$, $S = S_{\ell H}$, $I_3 = c$, $S_3 = p$の重い中間子の軽い自由度を表す。また，右辺の後ろの２個の括弧はClebsch-Gordan係数を表す。この模型では，重い中間子として基底状態の二重項に属するものしか扱わないので，$I_H = S_{\ell H} = 1/2$の場合のみを考える。

相互作用ハミルトニアン（10）の状態（11）についての行列要素をとると

$$\langle\, I', a', S'_\ell, m'; R' I_H, S_{\ell H}\,|H_I|\, I, a, S_\ell, m; R, I_H, S_{\ell H}\rangle$$

$$= gF'(0)\left(\begin{array}{cc|c} R & I_H & I \\ b & c & a \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} R & S_{\ell H} & S_\ell \\ n & p & m \end{array}\right)$$

$$\times \left(\begin{array}{cc|c} R' & I_H & I' \\ b' & c' & a' \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} R' & S_{\ell H} & S'_\ell \\ n' & p' & m' \end{array}\right)$$

$$\times \left(R'b'n'\,\left|Tr A\sigma_j A^{-1}\tau_k\right|\, Rbn\right)$$

$$\times \left\{I_H c' S_{\ell H} p'\,\left|I^k_H S^j_{\ell H}\right|\, I_H c S_{\ell H} p\right\} \tag{12}$$

のようになる。行列要素のHについての部分は，$SU(2)$の生成子の既約表現についての行列要素だから

$$\left\{I_H c' S_{\ell H} p'\,\left|I^k_H S^j_{\ell H}\right|\, I_H c S_{\ell H} p\right\} = T^{k(I_H)}_{c'c} T^{j(S_{\ell H})}_{p'p} \tag{13}$$

と書ける。ここで，$T^{k(R)}_{ba}$は，dim$R$の既約表現における生成子であり，Wigner-Eckartの定理を使うとClebsch-Gordan係数を用いて

$$T^{k(R)}_{ba} = \sqrt{R(R+1)}\left(\begin{array}{cc|c} R & 1 & R \\ a & k & b \end{array}\right) \tag{14}$$

と書くことができる。

次に，行列要素のソリトンに関する部分を考える。演算子は随伴表現の表現行列を用いて

$$Tr\left[\, A\sigma_j A^{-1}\tau_k\,\right] = 2D^{(1)}_{kj}(A) \tag{15}$$

と書ける。２つの表現行列の積は

$$D^{(R)}_{ab}(A) D^{(S)}_{cd}(A) = \left(\begin{array}{cc|c} R & S & T \\ a & c & e \end{array}\right)$$

$$\times \left(\begin{array}{cc|c} R & S & T \\ b & d & f \end{array}\right) D^{(T)}_{ef}(A) \tag{16}$$

のように１つの表現行列で表すことができ，表現行列の直交性は

$$\int_{SU(2)} D^{(R)}_{ab}(A) D^{*(S)}_{cd}(A) = \frac{1}{\dim R}\delta_{RS}\,\delta_{ac}\,\delta_{bd} \tag{17}$$

で与えられる。以上のことと随伴表現が実表現であることを用いると，ソリトンについての行列要素は

$$\left(R'b'n'\,\left|Tr\left[\, A\sigma_j A^{-1}\tau_k\,\right]\right|\, Rbn\right)$$

$$= 2(-1)^{R+n+R'+n'}\sqrt{\dim R \dim R'}$$

$$\times \int_{SU(2)} D^{(R')}_{b'\,-n'}(A) D^{*(R)}_{b\,-n}(A) D^{(1)}_{kj}(A)$$

$$= 2\sqrt{\frac{\dim R}{\dim R'}}\left(\begin{array}{cc|c} R & 1 & R' \\ b & k & b' \end{array}\right)$$

$$\times \left(\begin{array}{cc|c} R & 1 & R' \\ -n & j & -n' \end{array}\right) \tag{18}$$

となる。したがって，式（12）は，8個のClebsch-Gordan係数を使って表すことができ，それを6jシンボルを用いてまとめると

$$\begin{aligned}&\langle I', a', S'_\ell, m'; R', I_H, S_{\ell H}|H_I|I, a, S_\ell, m; R, I_H, S_{\ell H}\rangle\\&= -2gF'(0)(-1)^{I+I_H+S_\ell+S_{\ell H}+2R}\\&\quad\times\sqrt{\dim R \dim R' \dim I_H \dim S_{\ell H}}\\&\quad\times\sqrt{I_H(I_H+1)S_{\ell H}(S_{\ell H}+1)}\\&\quad\times\begin{Bmatrix} R & 1 & R' \\ I_H & I & I_H \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} R & 1 & R' \\ S_{\ell H} & S_\ell & S_{\ell H} \end{Bmatrix}\\&\quad\times\delta_{II'}\delta_{aa'}\delta_{S_\ell S'_\ell}\delta_{mm'}\end{aligned} \tag{19}$$

と書くことができる。

これにより，重い重粒子の基底状態を決めることができる。簡単のために，ここからは状態$|I, a, S_\ell, m; R, I_H, S_{\ell H}\rangle$を$|I, S_\ell; R\rangle$と書き表し，$R$の異なる状態の線形結合を$|I, S_\ell\rangle\rangle$で書き表す。また，重い中間子の軽い自由度を$\bar{q}$で書き表す。核子と同じアイソスピン$I = 1/2$，スピン$S = 1/2$を持つソリトン$N$及び，$\Delta$重粒子と同じアイソスピン$I = 3/2$，スピン$S = 3/2$を持つソリトン$\Delta$と，$\bar{q}$を合わせた状態のアイソスピンとスピンはそれぞれ

$$\begin{array}{lll} I=0,1, & S_\ell=0,1 & for\ N\otimes\bar{q}\ state \\ I=1,2, & S_\ell=1,2 & for\ \Delta\otimes\bar{q}\ state \end{array} \tag{20}$$

になる。N$\otimes\bar{q}$状態の中の$I = 1$，$S_\ell = 1$以外の状態は相互作用ハミルトニアン（10）の固有状態なので固有値は簡単に求まり，状態$|0, 0; 1/2\rangle$，$|1, 0; 1/2\rangle$，$|0, 1; 1/2\rangle$についてそれぞれ$-3gF'(0)/2$，$gF'(0)/2$，$F'(0)/2$となる。N$\otimes\bar{q}$状態の$I = 1$，$S_\ell = 1$の状態は相互作用ハミルトニアン（10）の固有状態ではないので，相互作用ハミルトニアンによって$\Delta\otimes\bar{q}$の$I = 1$，$S = 1$状態と混じり合う。それぞれN$\otimes\bar{q}$，$\Delta\otimes\bar{q}$の$I = 1$，$S = 1$の状態である$|1, 1; 1/2\rangle$，$|1, 1; 3/2\rangle$という基底をとると，相互作用ハミルトニアンは

$$H_I = -\frac{gF'(0)}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} \tag{21}$$

のような行列になる。この行列を対角化すると

$$H_I = -\frac{gF'(0)}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

となり，そのときの基底は

$$\begin{cases} |1,1\rangle\rangle_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1;\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1,;\frac{3}{2}\rangle \\ |1,1\rangle\rangle_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1;\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,1,;\frac{3}{2}\rangle \end{cases} \tag{23}$$

となる。したがって，$|1, 1\rangle\rangle_0$，$|1, 1\rangle\rangle_1$についての固有値はそれぞれ$-3gF'(0)/2$，$gF'(0)/2$となる。相互作用ハミルトニアンの固有値はソリトンと重い中間子の結合状態の結合エネルギーを表すと考えられる。したがって，ソリトン$\otimes\bar{q}$状態のうち，結合する状態は負の結合エネルギーを持つ状態，$|0, 0; 1/2\rangle$と$|1, 1\rangle\rangle_0$であると考えられる。$|0, 0; 1/2\rangle$状態と重いクォーク（Q）と合わせた状態はスピンとアイソスピンがそれぞれ$S = 1/2, I = 0$のΛ_Q重粒子に対応し，$|1, 1\rangle\rangle_0$状態と重いクォークと合わせた状態は，$S = 1/2, I = 1$のΣ_Q重粒子と$S = 3/2$，$I = 1$のΣ^*_Q重粒子の縮退した二重項に対応すると考えられる。

その結合エネルギーを用いると，この3つの重い重粒子の質量は

$$\begin{cases} m_{\Lambda_Q} = M_{sol} + \bar{m}_H - \frac{3}{2}gF'(0) \\ \bar{m}_{\Sigma_Q} = M_{sol} + \bar{m}_H - \frac{3}{2}gF'(0) \end{cases} \tag{24}$$

で表すことができる。ここで，M_{sol}はソリトンの質量で，$\bar{m}_H$と$\bar{m}_{\Sigma Q}$はスピンの重みを考慮した平均値で

$$\begin{cases} \bar{m}_{\Sigma_Q} = \frac{1}{3}\left(m_{\Sigma_Q} + 2m_{\Sigma^*_Q}\right) \\ \bar{m}_H = \frac{1}{4}\left(m_{P_Q} + 3m_{P^*_Q}\right) \end{cases} \tag{25}$$

で与えられる。この3つの重粒子の質量の縮退は，m_Qが大きいという極限をとっているために重いクォークについてのスピン対称性が存在し，N_cが大きいという極限をとっているためにソリトンについてのスピン・アイソ

スピン対称性が存在することをよく反映している。

重いクォークを１つ含む重粒子であるΛ_QとΣ_Qの質量の違いを考えるためには，$1/N_c$についての次主要項である，ソリトンの慣性モーメントについての項を考える必要がある。この項は核子Nと重粒子Δの質量差を与えるものでる。これを考慮すると，$|\,0, 0; 1/2\,\rangle$ 状態についての相互作用エネルギーは$-3gF'(0)/2 + 3/8\lambda$のように変更を受け，$|\,1, 1; 1/2\,\rangle$，$|\,1, 1; 3/2\,\rangle$ 状態を基底としたときの相互作用ハミルトニアン（21）は

$$H_I = -\frac{gF'(0)}{6}\begin{pmatrix} 1 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix} + \frac{3}{8\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \tag{26}$$

のように変更を受ける。この相互作用ハミルトニアンを対角化すると

$$H_I = \begin{pmatrix} -\dfrac{3gF'(0)}{2} + \dfrac{11}{3\lambda} & 0 \\ 0 & +\dfrac{gF'(0)}{2} + \dfrac{7}{8\lambda} \end{pmatrix} \tag{27}$$

となる。このときの基底も式（23）から少し変更を受ける。この相互作用エネルギーを用いると，質量公式（24）も変更を受け

$$\begin{cases} m_{\Lambda_Q} = M_{sol} + \bar{m}_H - \frac{3}{2}gF'(0) + \frac{3}{8\lambda} \\ \bar{m}_{\Sigma_Q} = M_{sol} + \bar{m}_H - \frac{3}{2}gF'(0) + \frac{11}{8\lambda} \end{cases} \tag{28}$$

となる。

Skyrme模型では，$I = J = 1/2, 3/2$の量子数を持つソリトンを，それぞれ核子N，重粒子Δに対応するものと考える。そのため核子Nと重粒子Δの質量の差は

$$M_\Delta - M_N = \frac{3}{2\lambda} \tag{29}$$

で与えられることになる。λはf_π^2に比例するからオーダーN_cの量と考えられ，この式は質量の差が$1/N_c$のオーダーの量であることを示している。

（28）と（29）を合わせると，重いクォークを１つ含む重粒子の質量と核子N・重粒子Δの質量の間に以下のような関係式が得られる。

$$\frac{1}{3}\left(m_{\Sigma_Q} + 2m_{\Sigma_Q^*}\right) - m_{\Lambda_Q} = \frac{2}{3}\left(m_\Delta - m_N\right) \tag{30}$$

この質量関係式に，実験で発見されている重粒子の質量の実験値 [11],

$$\begin{aligned} m_N &\simeq 938.92\,[\mathrm{MeV}] \\ m_\Delta &\simeq 1230\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Lambda c} &\simeq 2286.46\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Sigma c} &\simeq 2453.54\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Sigma_c^*} &\simeq 2518.13\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Lambda b} &\simeq 5619.60\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Sigma b} &\simeq 5813.10\,[\mathrm{MeV}] \\ m_{\Sigma_b^*} &\simeq 5832.53\,[\mathrm{MeV}] \end{aligned}$$

を代入すると，左辺の値はチャームクォークを含む重粒子とボトムクォークを含む重粒子でそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(m_{\Sigma_c} + 2m_{\Sigma_c^*}\right) - m_{\Lambda_c} &\simeq 210.14\,[\mathrm{MeV}] \\ \frac{1}{3}\left(m_{\Sigma_b} + 2m_{\Sigma_b^*}\right) - m_{\Lambda_c} &\simeq 206.45\,[\mathrm{MeV}] \end{aligned} \tag{31}$$

となり，右辺の値は

$$\frac{2}{3}\left(m_\Delta - m_N\right) \simeq 195.39\,[\mathrm{MeV}] \tag{32}$$

となる。右辺と左辺の値の差異は，それぞれ

$$\begin{aligned} \delta_c &\simeq 14.75\,[\mathrm{MeV}] \\ \delta_b &\simeq 11.07\,[\mathrm{MeV}] \end{aligned} \tag{33}$$

となった。この差異は，この関係式を導くときに無視したΛ_{QCD}/m_Q展開と$1/N_c$展開における高次項の寄与から来ると考えられる。Λ_{QCD}/m_Qの高次の項は，重いクォークの質量に依存するため，チャームクォークとボトムクォークの重さの関係が$m_c < m_b$であることから，$\delta_c > \delta_b$となっていることと整合している。

この質量関係式における差異は，最も軽い重粒子である核子（N）の質量との比をとるとそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_c}{m_N} &\simeq 0.0157 \\
\frac{\delta_b}{m_N} &\simeq 0.0118
\end{aligned}
\tag{34}
$$

となる。これらの値は質量関係式を導出するときに無視した展開の次のオーダーの項の大きさの目安

$$
\begin{aligned}
\frac{\Lambda_{QCD}}{m_c} &\lesssim 0.236 \\
\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b} &\lesssim 0.0718 \\
\frac{1}{N_c^2} &\simeq 0.111
\end{aligned}
\tag{35}
$$

の各値と比較するととても小さく，想定している展開の近似の精度に比べても良く整合しているということができる。

5　まとめ

本論文では，重いクォークの有効理論と$1/N_c$展開理論の有効理論とされているSkyrme模型を組み合わせた模型を用いて導出された重い重粒子の質量関係式について議論した。質量関係式は重粒子であるN，Δの質量と重いクォークを１つ含む重粒子Λ_Q，Σ_Q，Σ^*_Qの質量の間の関係を与える近似的な関係式であった。実験結果とは誤差の大きさも含めてよく整合してる関係式であることを示した。

同じ模型を用いて，以前の論文でセミレプトニック崩壊の構造関数を計算可能であることを示した [16]。この模型では，重いクォークを１個含む重粒子は（$qqqQ\bar{q}$）という構成になり，エキゾティックハドロンとされている重粒子（$qqqq\bar{Q}$）とは本質的な違いはない。そのためこの模型ではエキゾティックな重粒子も同じように扱えるという利点があり，有用であると言えるであろう。

参考文献

[1] Large Hadron Collider beauty experiment (LHCb, http://lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/)
[2] N. Isgur and M.B. Wise, Phys. Lett. **B232** (1989) 113; **B237** (1990) 527
[3] M. Neubert, Phys. Rep. **245** (1994) 259
[4] N. Isgur and M.B. Wise, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1130
[5] G. 'tHooft, Nucl. Phys. **B72** (1974) 461
[6] E. Witten, Nucl. Phys. **B160** (1979) 57
[7] R. Dashen, and A.V. Manohar, Phys. Lett. **B315** (1993) 425,438
[8] E. Jenkins, Phys. Lett. **B315** (1993) 431,441,447
[9] R. Dashen, E. Jenkins and A.V. Manohar, Phys. Rev. **D49**(1994) 4713
[10] T.H.R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. **A260** (1961) 127
[11] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. **D98** (2018) 030001
[12] Z. Guralnik, M. Luke and A.V. Manohar, Nucl. Phys. **B390**(1993) 474
[13] E. Jenkins, A.V. Manohar and M.B. Wise, Nucl. Phys. **B396**(1993) 27
[14] E. Jenkins, A.V. Manohar and M.B. Wise, Nucl. Phys. **B396**(1993) 38
[15] G.S. Adkins, C.R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B228**(1983) 552 and H.R. Quinn(ed.), SLACR-504(1998)
[16] Y. Matsui, 愛知江南短期大学紀要**33** (2004) 73