〔研究ノート〕

ニュートンおよびアインシュタインにもとづく 大都市圏に関する研究

神　頭　広　好

I　はじめに

従来から、地域科学においてポテンシャルモデルおよび重力モデルを用いて都市の境界および商圏に応用されたモデルは多く見られ、とりわけニュートンの重力モデルにもとづいてReilly、ConverseおよびHuffなどによって商圏モデルが構築されている。その後Wilsonなどによって出発・着地点の制約付きの重力モデルを発展させた空間的相互作用モデルが現在でも交通量などの予測に応用されている。

本研究では、神頭（2016）の再考として、ニュートンの重力モデルは都市や地域の商圏などに応用されているもののアインシュタインなどの相対性モデルはあまり見られないことから、ニュートンの引力の法則およびアインシュタインの相対性モデルから都市・地域への応用可能性について考察する。最終的には3次元空間の線はピタゴラスの定理から空間上の点を結んだものであり、時空上のディメンジョンにおける世界線（空間／時間＝1）は事象を結んだ線であることに尽きる。

なお、ここでは直接には触れないが、コペルニクス、ガリレオ[1]、ケプラーな

1 ガリレオとアインシュタインの相対論の比較については付録1を参照せよ。この内容につ

どの宇宙物理学者の研究、さらにホーキングに基づいていることは言うまでもない。

Ⅱ　ニュートンからアインシュタインへ

まず､ここではニュートンの運動の法則と人間社会との関係について触れる。

＜第１法則：慣性の法則＞

物体に力が加えられない限り、いつまでも静止状態を続けるか、一直線上を等速で運動を続ける (等速直線運動)。

・人間は刺激を受けない限り、常に一定の生活に満足する。

ちなみに等速直線距離 Z は、

$$Z = vt \qquad (1)$$

で表される。ただし、v は時速、t は時間をそれぞれ示す。

ついで、時速と加速度との関係は、

$$v = at \qquad (2)$$

で表される。ただし、a は加速度を示す。

また、等加速度または重力加速度による距離は、

$$S = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt \qquad (3) \qquad \text{および} \qquad S = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (4)$$

で表される。ただし、$\frac{v}{2}$ は平均速度、g は重力加速度を示す。

＜第２法則：力の法則＞

物体に力 F を加えると、その方向に加速度 a が生じ、その力が強いほど加速度は大きくなり、質量 m が大きいほど加速しにくい。($F = am$ または $a = \frac{F}{m}$)

・魅力の高いところへ、消費者は集中する。

いては、酒井 (2016、第５講) で平易に説明されている。

＜第３法則：作用反作用の法則＞

　すべての作用に対して等しい反作用が存在する。

・人間は画一的な行動をとらないために、人間の社会には競争が生まれる。

アインシュタインの相対性モデルは、時間、長さ、物質の３つの側面から、ピタゴラスの定理にしたがって、

$$c^2t^2 = v^2t^2 + c^2t_0^2 \tag{5}$$

で表される。（図１参照）

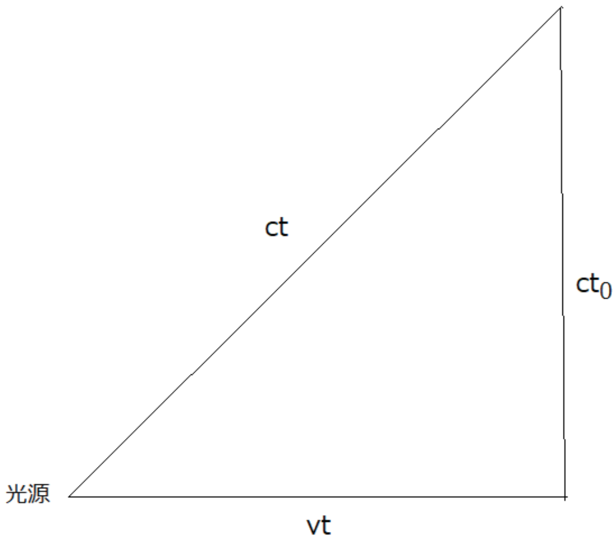


図１

　これより外部から見た時間 t は、

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \tag{6}$$

で表される。ただし、t_0は静止系における時間[2]、t は外部から見た時間、v は乗り物の速度、c は光の速度をそれぞれ示す。

また、運動エネルギーは、

$$mv^2 = mal = Fl = E \tag{7}$$

で表される。($at^2 = vt = l$ から導かれる) ただし、力は $F = ma$ で表され、a は加速度を示す。

ちなみに ,(7) 式から v が c に近づくと E が最大に近づくことを示唆している。

これより長さの相対性モデルは、

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \tag{8}$$

で表される。(付録 1 および付録 2 を参照)　ただし、l_0は静止している長さ、l は静止系から見た運動物体の長さをそれぞれ示す。

質量の相対性モデルは、

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \tag{9}$$

で表される[3]。ただし、m_0は静止質量、m は運動している物体の質量をそれぞれ示す。

また、エネルギーに関しては (9) 式の両辺に c^2を乗じることによって、

2 乗り物の中において静止している時間であるが、乗り物と一緒に動いていることに注意を要する。

3 これについては、長さと質量が比例していると考えると分かり易い。

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad (10)$$

で表される。

さらに、(10) 式をテーラー展開 (付録３) すると、

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \qquad (11)$$

が導かれる[4]。これは全エネルギーは静止エネルギーと運動エネルギーの和であることを示している。

(11) 式から、

$$\frac{m}{m_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (12)$$

が導かれる。(12) 式より、

$$\frac{m - m_0}{m_0} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad (13)$$

に書き換えられる。分子は都心への流入人口を示しており、(13) 式から、

$$0 < \frac{u}{m_0} < \frac{1}{2} \qquad (14)$$

が成立する。ただし、$u(=m-m_0)$ は都心部への流入人口を示している。これは都心部周辺の都市的アメニティ開発速度[5]が相対的に大きくとも流入人口は都

4 これは、力学エネルギーである。

5 これについては、レジャー施設を含む公共サービスの開発速度を示す。

心部の人口の半分以下であることを示唆している。

これについてはエネルギーとしての昼間人口は、都心部の常住人口、都心部の都市的アメニティ開発速度、都心部周辺の都市的アメニティ開発速度が関連していることが分かる。

・アインシュタインの相対性モデルにみるリピーター

静止エネルギーを常連客としてのリピーターm_0として、運動エネルギーを非リピーターmとすると、（13）式左辺の分子は非リピーターを分母はリピーターを示している。

また、テーラー展開については、

$$0<\frac{v^2}{c^2}<1 \tag{15}$$

を必要とする。それゆえ（13）式から

$$0<\frac{m-m_0}{m_0}<\frac{1}{2} \tag{16}$$

が導かれる。したがって、リピーター（ 常連客数m_0 ）対総顧客数mの範囲は、

$$\frac{2}{3}<\frac{m_0}{m}<1 \tag{17}$$

である。これについては、ニュートンの引力の法則によるリピーターは超短期において全体の約40% であり、通常において50% であった。しかし、（17）式から当該施設の開発速度や周辺の開発速度を導入すると、リピーターの割合が約67% から100% の範囲にあることが分かった。

付録１　ガリレイの相対原理とアインシュタインの相対性理論

まず、付図１にもとづいてガリレイの相対原理[6]は、時間は絶対的なものと

6 ガリレイ原理はガリレイ－ニュートンの相対性原理とも呼ばれている。これについては、酒井（2016、第5講 ）を参照せよ。

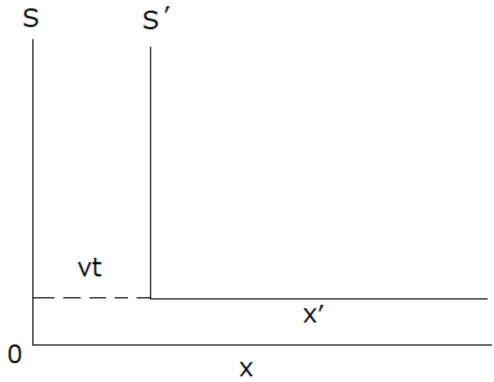
して、

$vt = x - x'$、$t = t_0$

で表されることから、慣性系 S および S' では、長さとしての空間は、

$x' = x - vt$

として表される。ただし、t_0は地上から見た電車内の時間、t は地上の時間



付図 1

これをアインシュタインの相対性理論にあてはめると、

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

および

$$t' = \frac{(1 - \frac{v}{c^2})t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

で示される[7]。

現実の移動速度が光速度よりもかなり小さい場合、$\dfrac{v}{c} \to 0$であることから、

$t = t'$である。

ここで、系が異なっていても速度に関わらない時空間の式は、上記２つの式からvを消去すると、

$$(x'^2 - x^2) - (c^2t'^2 - c^2t^2) = (x'^2 - x^2)\frac{v^2}{c^2} + (t^2 - t'^2)\frac{c^2v^2}{c^2}$$

が導かれる。ここで、$\dfrac{v^2}{c^2} \to 0$であるとすると、

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

が得られる。したがって、一般的な次元から導かれるピタゴラスの定理に基づく距離として扱うためには、cをicとする虚数を使わなければならない。実際にグラフを作成する際にはiを除いたct軸を用いている。さらに、この式は時空間の距離がゼロになる場合は、

$$\frac{x}{ct} = \frac{x'}{ct'} = 1$$

および

$$\frac{x}{t} = \frac{x'}{t'} = c$$

が示される。これは光の軌跡が時間距離と空間距離の45度線を描き、光の速度が一定であることを示唆している。

なお、虚数時間の宇宙理論についてはホーキング博士の「無境界仮説」がある[8]。

7 これについては、佐治（2016、pp.241-243）を参照せよ。
8 これについては、「ホーキング博士の宇宙論」『Newton』2018年、6月号、pp.24-43を参照せよ。

付録２　光速の意味

動いている電車の中にいる人と外からその電車を眺めている人は、光の速度を踏まえた長さ（ 空間 ）と時間距離との関係は、

$$l_0^2 + (vt)^2 = (ct)^2$$

で表される。この式より、

$$\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = ct = l$$

が導びかれる。これについては速度が速いほど動いているものの長さは大きくなることを示している。

したがって、光速は、

$$c = \frac{l}{t}$$

で表される。光速は世界最速であることから空間が縮むと時間が縮むことを示唆している。

ちなみに、空間と時間が一致するときには光速は１である。この空間と時間との関係は世界線と呼ばれている。

付録３　テーラー展開と都市

接線の定理から、凹関数 $f(x)$ は、

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x-a)$$

で表される。

ここで、$x \approx a$ のもとで一般にテーラー展開は、

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

で示される。

原点0のまわりのテーラー展開としてのマクローリン展開は、一般に

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

である。ここでは、$0<x<1$ のもとで、

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

を2項目までマクローリン展開をすると、

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x$$

である。ここで、$x=\frac{v^2}{c^2}$ を上式へ代入すると、

$$f(x)=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

で表される。相対モデルから、

$$f(x)=\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}}=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

であることから、この式の第2項および第3項にm_0c^2を乗じると、

$$E=mc^2=m_0c^2+\frac{1}{2}m_0v^2$$

が導かれる。

これについては、$f(x)$を昼間人口比とすれば、周辺の郊外部の都市開発速度と都心部の開発速度が等しい（$v=c$）場合、昼間人口比の範囲は、

$$0<f(x)<\frac{3}{2}$$

である。ただし、m_0は常住人口、m は昼間人口をそれぞれ示す。

都心部および周辺都市における「距離当たりの乗車時間」などを推計するこ

とによって、昼間人口比について興味深い結果が得られるかも知れない。

Ⅲ　ブラックホールを考慮した都市モデル

都市がいくつも存在するケースでは、都市の魅力からくる境界を越えた都市のエネルギーが存在する。

ブラックホールを語るに、シュバルトツシルト[9]の半径を理解する必要がある。

シュバルトツシルトの半径は、ブラックホールを対象にしており、その外側は見ることができない。

まず、ニュートン力学にもとづいて、全エネルギーは運動エネルギーと重力エネルギーから成っている。

全エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} \qquad (18)$$

で表される。ただし、m は運動している物体の質量 (都心の人口)、M は天体の質量 (周辺の都市人口)、G は万有引力定数[10]をそれぞれ示す。

（18）式より、地球から宇宙への脱出速度については以下の3ケースに分類される。

（a）$E < 0$ ならば重力のほうが強く、脱出できない。

（b）$E = 0$ ならば速度が脱出速度である。

（c）$E > 0$ ならば脱出できる。

これより、周辺都市にとっての都心への魅力を示す脱出速度は、

9 彼は、初めてブラックホールを数学的に説明したドイツの科学者（1873~1916）である。これについては本間（2017、pp.80-84）を参照せよ。

10宇宙物理学では、$G = 6.67 \times 10^{-11}$である。

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{19}$$

である。脱出速度が昼間人口比に比例しているとすると[11]、

$$\hat{v} = \frac{A}{M} = D \tag{20}$$

で表される。ただし、A は周辺都市の昼間人口、それゆえ D は周辺都市の昼間人口比を示す。

（20）式を（19）式へ代入すると、

$$D = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \tag{21}$$

で表される。また、（21）式から都心ー都市間の距離 r は、

$$r = \frac{2GM}{D^2} \tag{22}$$

で表される。

（22）式から、相対的に昼間人口よりも常住人口が大きい都市ほど都心から離れており、昼間人口比が相対的に高い都市ほど都心に比較的近いことを示唆している。ちなみに、日本の現実において県庁所在都市は比較的人口が多いが、昼間人口比の高い都市は、都心に近い都市であることを示唆しているように見える。

ところでブラックホールにおいて、光が出てこない領域 (シュバルトツシルトの半径) は、

$$R_c = \frac{2GM}{c^2} \tag{23}$$

で表される。ただし、R_c はブラックホールの半径、c は光の速度をそれぞれ示す。上記（a）のケースでは、都心の開発速度、または都心における高層度によって、

11 これは、活動できる人口が相対的に多いほど、都心の魅力に引っ張られる速度が速いことを意味している。

都心 (ブラックホールの特異点) から脱出できない目安となる。
上記 (b) のケースでは、都心と郊外が調和された開発される速度である。
上記 (c) のケースでは、地方のさびれた商店街はより衰退して、周辺部が発展していくケース

ちなみに、万有引力の法則は、

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{24}$$

で表される。（ポテンシャルについては付録4を参照）

したがって、重力エネルギーは、

$$rF = G\frac{Mm}{r} \tag{25}$$

で表される。

付録４　重力の場はポテンシャル (山田 (2005、第2章))

時間のファクターは入っていないが､強力な窪みとしてのブラックホールは、重力場としての

$$g = G\frac{m}{r^2}$$

によって､ r が小さいほど重力場 g は強く､ r が大きいほど重力場 g は弱くなる。したがって、面の曲がり具合が急なほど重力場は強くなる。

Ⅳ　おわりに

ここでは、アインシュタインの相対理論を都市へ応用するために基礎的な内容を整理した｡静止したものと運動しているものを夜間人口と昼間人口として、そこに照準をあてることによって、都心部と周辺部の居住空間の快適さ（アメニティ）およびその開発速度が都心部への人口集中をもたらすかについて分析

することの可能性を指摘した。都心部の開発速度を絶対とすると、昼間人口比が1.5を超えないことも分かった。

今後は、物理学の基礎を学びながら人間行動および都市の変化について虚数時間およびブラックホールに着目することによって、ホーキンスの宇宙理論にも迫って行きたい。

最後に、本研究ノートを読んで頂いた方々に対して少しでも宇宙物理学の都市への応用可能性について考えるきっかけになれば幸いです。

参考文献

Stannard, R,（2008）Relativity: A Very Short Introduction Oxford University（邦訳－新田英雄『相対性理論－常識への挑戦』丸善出版、2013年）

神頭広好（2016）『宇宙物理学の都市空間への応用』愛知大学経営総合科学研究所叢書48、愛知大学経営総合科学研究所

酒井邦嘉（2016）『科学という考え方』中公新書

酒井邦嘉（2016）『高校数学でわかるアインシュタイン』東京大学出版会

佐治晴夫（2016）『14歳のための宇宙授業』春秋社、pp.53－57

志賀浩二（1995）『無限のなかの数学』岩波新書

竹内　薫（2004）『世界が変わる現代物理学』ちくま新書

竹内　薫（2005）『ホーキング虚時間の宇宙』講談社

都築卓司（1969）『四次元の世界』講談社、第6章

福江　純（2009）『よくわかる相対性理論』日本実業出版社

福島　肇（2007）『新装版　相対論の ABC』講談社、第6章

本間希樹（2017）『巨大ブラックホールの謎』講談社

茂木健一郎（2016）『アインシュタインと相対性理論がよくわかる本』PHP 文庫

山田克哉（2005）『宇宙のからくり』講談社

山田克哉（2018）『$E=mc^2$のからくり』講談社、第5章