非可換離散空間におけるゲージ理論とBPS方程式

池　森　　　均
小　津　秀　晴
北　門　新　作
佐　藤　俊　郎
松　井　吉　光

要　　約：２次元空間R^2上のYang-Mills-Higgs系は、Higgs場を離散空間のゲージ場と解釈することによって、非可換離散空間$R^2\times Z_2$におけるYang-Mills理論とみなすことが出来ることを行列微分形式の方法で示した。R^2上のボルテックス方程式は$R^2\times Z_2$という疑似的な４次元空間におけるインスタントン方程式とみなすことができることを明らかにした。

キーワード：非可換幾何、ゲージ理論、BPS方程式、インスタントン、ボルテックス

１．はじめに

場の理論の量子論的な性質を分析する際に、古典場の方程式の厳密解が重要な役割を果たすことは広く認識されている。特にYang-Millsゲージ理論や、Yang-Mills-Higgs理論の場合には、対称性の破れや閉じ込めなどの量子効果を理解するためにも、古典場の方程式の解を体系的に得ることは非常に有用である。ところが、これらの理論の場の方程式は非線形２階微分方程式であり、一般には可積分ではないため、その解の構成は容易ではない。しかし、一方でこれらの理論には、場の方程式を自動的に満たすような１階微分方程式とその解の集合が存在することが知られている。４次元Yang-Mills-Higgs理論の静的な３次元エネルギー積分を最小化する境界状態として提案されたこの方程式は、BPS（Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield）方程式と呼ばれ、非アーベル的モノポール解を与えるものである。また４次元時空の計量符合をユークリッド化してYang-Millsゲージ理論を考えた場合の、４次元作用積分を最小化する境界状態である、自己双対Yang-Mills（Self-Dual Yang-Mills = SDYM）方程式は、インスタントン解と呼ばれる古典解を与えるものである。これらの解は、ゲージ理論におけるソリトン解と考えられ、トポロジカルな安定性という特性がある。

近年の理論では、BPS境界の役割を超対称性の観点からとらえることが多く、SDYM方程式等の自己双対性を持つ同様の方程式の解を含めてBPS状態と総称することもある。本稿では理論に超対称性を導入することを前提

とはせず、BPS超対称状態の議論とは切り離して、自己双対性の観点に絞って考察することにする。

自己双対Yang-Mills方程式の解、すなわちインスタントンに対するADHM（Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin）の構成方法は、ゲージ理論のソリトン解を得るための、最も成功した手法の一つである。この理論ではSDYM方程式の情報は解のパラメーターであるインスタントンモジュライ空間の関係式に翻訳される。非アーベル的モノポール方程式の場合、同様の構成方法は、Nahm方程式と呼ばれる微分方程式に翻訳するものである。これらの理論の特徴は、もとの微分方程式も解空間のパラメーターの従う方程式も、どちらも SDYM方程式を簡約したものとなっている点である。

２次元空間R^2上のYang-Mills-Higgs理論のソリトンであるボルテックスの場合、ADHMに類似のモジュライの関係式と、微分方程式の複合情報に帰着されるが、half ADHMと呼ばれるこの関係は、その基本原理が良く理解されていない。その類似性を理解するためには、R^4上のYang-Mills理論の自己双対性との関係をより深く理解する必要があるように思われるからである。本稿では、R^2上のボルテックスとR^4上のインスタントンの関連を明らかにするための理論構築の有力な方法を提示した。２次元空間R^2上のYang-Mills-Higgs系は離散型非可換空間$R^2\times Z_2$におけるYang-Mills理論とみなすことが出来ることを行列微分形式の方法で示した。Higgs場を離散空間のゲージ場と解釈することによって、Higgs機構による対称性の破れを含めたゲージ原理をみたすことが理解される。これによって、R^2上のボルテックス方程式は$R^2\times Z_2$という疑似的な４次元空間におけるインスタントン方程式とみなすことが可能となる。

２．非可換離散空間のゲージ理論

ここで考える離散空間は、２点（２つの要素）だけからなる空間であり、微分形式が非（反）可換離な代数に従うため非可換離散空間と呼んでいる。代数としてのp進数整数環Z_pとは構造が異なるが、偶奇の二値構造に注目して扱う場合が多いので、空間を表す記号としてはZ_2空間と表記している。

実際にはZ_2空間だけを取り出して考えているわけではなく、$M\times Z_2$のように通常の空間Mとの積構造の空間における微分幾何構造を考えるが、最初にZ_2空間における微分形式の定義を行い、ゲージ場と解釈できる接続形式1-formの性質について考察する。

本稿では､このZ_2空間に対して具体的な｢座標｣表示を用いず、座標に依存しない微分形式を導入することによってその性質を記述している。２点そのものではなく２点間を平行移動する接続形式によって表現していると考えてよい。$M\times Z_2$空間の場合で考えると、通常の空間Mの各点ごとにZ_2空間の２点が乗っていると見ることもできるが、２つのM空間が有限距離を隔てて２枚のシートのように重なっていて、この離散距離をつなぐ平行移動が存在すると見ることもできる。前者が座標表示での表現だとすると、後者は接続形式、すなわち微分形式による表現と考えることができる。本稿では、後者の表現を用いた場合のゲージ場の理論の構成を行う。Higgs場は離散空間のゲージ場であり、２枚のシート間の「距離」にあたる量の逆数がHiggs質量を与える。自発的対称性の破れを離散空間の幾何学構造として組み込んでゲージ原理を実現している点が注目に値する。

２．１．Z_2空間の微分形式

Z_2空間の微分形式は２×２行列で表される matrix differential formである。matrix differential formにはZ_2 gradingが導入され、

oddとevenの２種類に分けられる。対角要素だけで出来ている行列がevenで反対角要素だけで出来ている行列がoddである。このgradingにはevenで０、oddで１なる符合数が与えられていて、formのdegreeはこれに一致すると考える。後で拡張について触れるまで、degreeもmod 2で考えることとする。一般の２×２行列は

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_e + a_o$$

$$a_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},\ a_o = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

として、混成differential formと考える。matrix differential formどうしの外積（wedge積）は、基本的には行列の積であるが、詳細は後述する。２×２行列の基底を

$$e_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると、e_{00}, e_{11}はeven、e_{01}, e_{10}はoddであり、Z_2 grading符合数は

$$[e_{00}] = [e_{11}] = 0, [e_{01}] = [e_{10}] = 1$$

である。一般にgradingを与えられた２つの量ＦとＧに対して、その順序を入れ替える際に

$$FG = (-1)^{[F][G]}\, GF$$

のように符合が出る。（ここではFGの位置としての順序のみを問題にしている。代数的な積構造は別に計算のルールが与えられているとする）

このとき、一般の２×２行列は

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} = e_{ij} \otimes \mathcal{M}_{ij}$$

$$= e_{00} \otimes A + e_{01} \otimes C + e_{10} \otimes D + e_{11} \otimes B$$

と表現される。後の便宜のために、行列の基底を左側に、成分を右側に書く約束とする。微分形式を定義する空間として、$M \times Z_2$のように通常の空間との積構造の全体空間を考える場合は、matrixの要素A, B, C, Dは、一般に通常の空間のdifferential formである。$[X]$はform Xのdegreeを表すもので、matrix differential formに対してはgradingの符合数に一致すると考える。後の議論では、具体的にZ_2空間のp-formを定義するが、そこではdegreeはp=0, 1, 2の値を取りうる。この場合でも、matrix differential formのdegreeの偶奇がgradingの偶奇に対応するので、gradingの符合数とformのdegreeを同一視してもmod 2で定義される符合数としては問題はない。matrix differential formの外積∧は、通常の行列の積にgradingの符号を考慮したもので

$$\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}' = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A' & C' \\ D' & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \wedge A' + (-1)^{[C]} C \wedge D' & (-1)^{[A]} A \wedge C' + C \wedge B' \\ D \wedge A' + (-1)^{[B]} B \wedge D' & (-1)^{[D]} D \wedge C' + B \wedge B' \end{pmatrix}$$

と定義される。組み合わせて積を求める要素の対応関係は通常の行列の積と同じであるが、左側に位置する行列の要素を右側のものに作用させる際に、左の要素の位置の偶奇に依存して要素のgradingの符号が出ると考えている。

上で定義した２×２行列空間の基底間の積の基本代数は

$$e_{ij}\ e_{kl} = \delta_{\mathrm{jk}}\ e_{il}$$

具体的には

$$e_{00}\ e_{00} = e_{00},\ e_{00}\ e_{00} = e_{01}$$

$$e_{01}\ e_{10} = e_{00},\ e_{01}\ e_{11} = e_{01}$$

$$e_{10}\ e_{00} = e_{10},\ e_{10}\ e_{01} = e_{11}$$

$$e_{11}\ e_{10} = e_{10},\ e_{11}\ e_{11} = e_{11}$$

であるから、上の外積は

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}\wedge\mathcal{M}' \\
&=(e_{ij}\otimes\mathcal{M}_{ij})\wedge(e_{kl}\otimes\mathcal{M}'_{kl}) \\
&=(e_{ij}\ e_{kl})\otimes\left((-1)^{[\mathcal{M}_{ij}][e_{kl}]}\,\mathcal{M}_{ij}\wedge\mathcal{M}'_{kl}\right) \\
&=(\delta_{jk}\ e_{il})\otimes\left((-1)^{[\mathcal{M}_{ij}][e_{kl}]}\,\mathcal{M}_{ij}\wedge\mathcal{M}'_{kl}\right) \\
&=e_{il}\otimes\left((-1)^{[\mathcal{M}_{ij}][e_{jl}]}\,\mathcal{M}_{ij}\wedge\mathcal{M}'_{jl}\right)
\end{aligned}
$$

と計算していることになる。ここでのポイントは、成分である通常のdifferential formとmatrix differential formの基底の順序を入れ替える場合にも、符号が出現すると考えることである。Z_2 gradingのみを担う基底 $\{e_0, e_1\}$ を導入すると

$$e_0e_0=e_0,\ e_0e_1=e_1,\ e_1e_1=e_0$$

となるので、これを用いて

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}\wedge\mathcal{M}' \\
&=\left\{e_0\otimes\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}+e_1\otimes\begin{pmatrix}0&C\\D&0\end{pmatrix}\right\}\wedge\left\{e_0\otimes\begin{pmatrix}A'&0\\0&B'\end{pmatrix}+e_1\otimes\begin{pmatrix}0&C'\\D'&0\end{pmatrix}\right\} \\
&=e_0e_0\otimes\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A'&0\\0&B'\end{pmatrix}+e_1e_0\otimes\begin{pmatrix}0&C\\D&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A'&0\\0&B'\end{pmatrix} \\
&+e_0e_1\otimes\begin{pmatrix}(-1)^{[A]}A&0\\0&(-1)^{[B]}B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&C'\\D'&0\end{pmatrix}+e_1e_1\otimes\begin{pmatrix}0&(-1)^{[C]}C\\(-1)^{|D|}D&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&C'\\D'&0\end{pmatrix} \\
&=e_0\otimes\begin{pmatrix}AA'+(-1)^{[C]}CD'&0\\0&(-1)^{|D|}DC'+BB'\end{pmatrix}+e_1\otimes\begin{pmatrix}0&(-1)^{[A]}AC'+CB'\\DA'+(-1)^{[B]}BD'&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と計算してもよい。通常のdifferential formとZ_2 grading基底の順序を入れ替える場合にも、符号が出現すると考えている。

Z_2空間のdifferential formとしては、even, oddだけではなく、formのdegreeとして0, 1, 2-formを考えることができる。

2×2単位行列 $\mathbf{1}$ およびPauli行列 τ_1, τ_2, τ_3

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ \tau_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\tau_a\tau_b=\mathbf{1}\delta_{ab}+i\varepsilon_{abc}\tau_c$$

とする。一般に2×2行列は、$(\mathbf{1},\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$ を基底として展開できるので、これらをeven $(1,\tau_3)$ とodd $(\tau_1,\ \tau_2)$ に分ける。$\mathbf{1}$を0-formとして、τ_1, τ_2を1-formの基底θ_1, θ_2と考えると、

Z_2空間の2-formは

$$\theta_1\wedge\theta_2=\tau_1\tau_2=i\tau_3$$

を基底とすることがわかる。一般の2×2行列は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}&=\begin{pmatrix}A&C\\D&B\end{pmatrix} \\
&=\mathbf{1}\otimes\frac{A+B}{2}+\tau_3\otimes\frac{A-B}{2} \\
&+\tau_1\otimes\frac{C+D}{2}+\tau_2\otimes\frac{i(C-D)}{2}
\end{aligned}
$$

と展開できるので、$A=B$でない場合は、matrix formや通常のformとしてだけでなくtotalとしても、異なるdegreeのformが混在する。

2.2. Z_2空間の外微分作用

Z_2空間の外微分作用は

$$d_{\mathrm{V}} = i\,[\eta, \quad\}$$

と定義される。$[\alpha, \beta\}$はgraded commutatorで、

$$[\alpha, \beta\} = \alpha\beta - (-1)^{[\alpha][\beta]}\,\beta\alpha$$

ηは

$$\eta^2 = \mathbf{1}$$

を満たすoddなmatrixである。ここでは$M\times Z_2$空間を念頭におき、M空間方向を Horizontal, Z_2空間方向をVerticalと呼び、それぞれの空間の外微分作用をd_Hおよびd_Vと表す。

このとき

$$d_V\alpha = i\,[\,\eta, \alpha\,\}$$
$$d^2{}_V\alpha = i\,[\eta, i\,[\eta, \alpha\}\} = -\,[\eta, [\eta, \alpha\}\}$$

graded Jacobi恒等式

$$\begin{aligned}&(-1)^{[A]\,[C]}[A, [B, C\}\}\\+\,&(-1)^{[A]\,[B]}[B, [C, A\}\}\\+\,&(-1)^{[C]\,[B]}[C, [A, B\}\} =0\end{aligned}$$

に、$A = \eta, B = \eta, C = \alpha$を代入して

$$\begin{aligned}&(-1)^{\,[\alpha]}[\eta, [\eta, \alpha\}\}\\&\quad-\,[\eta, [\alpha, \eta\}\}\\+\,&(-1)^{\,[\alpha]}[\alpha, [\eta, \eta\}\} =0\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&2\,(-1)^{\,[\alpha]}[\eta, [\eta, \alpha\}\}\\+\,&(-1)^{\,[\alpha]}[\alpha, [\eta, \eta\}\} =0\end{aligned}$$

であるから、$[\eta, \eta\} =2\eta^2 = 2\cdot\mathbf{1}$より $[\eta, [\eta, \alpha\}\} =0$を得るので、任意の$\alpha$に対して

$$d^2_V\alpha =0$$

となり、

$$d^2_V=0$$

と考えてよいことがわかる。またgraded Leipniz's rule

$$d\,(\alpha \wedge \beta)= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{[\alpha]}\,\alpha \wedge d\beta$$

をみたすことも必要な性質の1つである。

一般には

$$\eta = \eta_\gamma = \cos\gamma\tau_1 + \sin\gamma\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\gamma} \\ e^{i\gamma} & 0 \end{pmatrix}$$

であるが、簡単のために

$$\eta = \eta_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1$$

を採用することが多い。この後の計算では、断らない場合は$\eta = \tau_1$をとることとする。このとき、matrix aに対するdの作用は

$$\begin{aligned} da &= i\,[\eta, a_e] + i\,\{\eta, a_o\} \\ &= i\begin{pmatrix} a_{21}+a_{12} & a_{22}-a_{11} \\ a_{11}-a_{22} & a_{21}+a_{12} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

のようになることがわかる。

また通常のformに対する外微分作用素をd_Hとすると

$$\begin{aligned} & d_H d_V \alpha \\ &= i d_H\,[\eta, \alpha\} \\ &= i d_H\left(\eta\alpha - (-1)^{[\alpha]}\,\alpha\eta\right) \\ &= i\left(-\eta d_H\alpha - (-1)^{[\alpha]}\,d_H\alpha\eta\right) \\ &= -i\left(\eta d_H\alpha - (-1)^{[\alpha]+1}\,d_H\alpha\eta\right) \\ &= -i\,[\eta, d_H\alpha\} \\ &= -d_V d_H\alpha \end{aligned}$$

となるので、

$$d_H\,d_V = -d_V\,d_H$$

と考えて良い事がわかる。したがって、一般に通常のformを成分にもつmatrix formに対しては、外微分作用素として

$$\boldsymbol{d} = d_H + d_V$$

を採用すれば

$$d^2 = d_H^2 + d_H d_V + d_V d_H + d_V^2 = 0$$

となることがわかる。このときmatrix differential form $\mathcal{M}$に対する$\boldsymbol{d}$の作用は

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}\mathcal{M}\\
&= d_H\mathcal{M} + d_V\mathcal{M}\\
&= \begin{pmatrix} dA & -dC \\ -dD & dB \end{pmatrix}\\
&+ i\left[\eta, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right] + i\left\{\eta, \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}\right\}\\
&= \begin{pmatrix} dA + i(C+D) & -dC - i(A-B) \\ -dD + i(A-B) & dB + i(C+D) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる。ここで、その役割が明らかな場合はd_Hを単にdと表記する。

2.3．$M\times Z_2$空間のゲージ理論

先ほど与えた、通常の微分形式を成分に持つ２×２のgraded matrixでtotal 1-formになっているものは、$\mathcal{M} = M\times Z_2$空間の接続すなわちゲージ場とみなすことができる。ここでMは通常の微分形式が定義されている多様体で、Z_2がmatrix formが定義されるdiscrete spaceである。先に触れたように、$\mathcal{M} = M\times Z_2$上のゲージ場は$\mathcal{M}$の1-formであり、

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} L & i\varphi \\ i\varphi^\dagger & R \end{pmatrix}$$

で表される。ここでL, Rは通常の空間Mの1-form, φはcomplexな0-formであり、いずれも$N\times N$行列と考えている。

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathbf{1}\otimes\frac{L+R}{2} + \tau_3\otimes\frac{L-R}{2}\\
&+ \tau_1\otimes\frac{\varphi+\varphi^\dagger}{2} + \tau_2\otimes\frac{i(\varphi-\varphi^\dagger)}{2}
\end{aligned}$$

と展開できる。これは

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(1,0)} + \mathcal{A}^{(1,2)} + \mathcal{A}^{(0,1)}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(1,0)} &= \mathbf{1}\otimes\frac{L+R}{2}\\
\mathcal{A}^{(1,2)} &= \tau_3\otimes\frac{L-R}{2}\\
\mathcal{A}^{(0,1)} &= \tau_1\otimes\frac{\varphi+\varphi^\dagger}{2} + \tau_2\otimes\frac{i(\varphi-\varphi^\dagger)}{2}
\end{aligned}$$

のように混成formであることを示している。ここで$\mathcal{A}^{(p,q)}$と表したものは、通常のp-formでmatrix q-formであることを示す。計算のルールでは、matrixの基底は左側に寄せる約束で計算を定義しているが、$\mathcal{A}^{(p,q)}$では通常のformのdegree pの方を先に書くことにする。この接続形式1-formはgraded matrixの計算の下でanti-hermitianである。すなわち

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^\dagger &= \begin{pmatrix} L^\dagger & (i\varphi^\dagger)^\dagger \\ (i\varphi^\dagger)^\dagger & R^\dagger \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -L & -i\varphi \\ -i\varphi^\dagger & -R \end{pmatrix} = -\mathcal{A}
\end{aligned}$$

これはgraded matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

のhermitian conjugateが

$$\mathcal{M}^\dagger = \begin{pmatrix} A^\dagger & (-1)^{[D]}D^\dagger \\ (-1)^{[C]}C^\dagger & B^\dagger \end{pmatrix}$$

の様に定義されるためである。この定義は

$$\mathcal{M} = e_{00}\otimes A + e_{01}\otimes C + e_{10}\otimes D + e_{11}\otimes B$$

に対して

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}^\dagger\\&=A^\dagger\otimes e_{00}^\dagger+C^\dagger\otimes e_{01}^\dagger+D^\dagger\otimes e_{10}^\dagger+B^\dagger\otimes e_{11}^\dagger\\&=A^\dagger\otimes e_{00}+C^\dagger\otimes e_{10}+D^\dagger\otimes e_{01}+B^\dagger\otimes e_{11}\\&=e_{00}\otimes A^\dagger+(-1)^{[C]}e_{10}\otimes C^\dagger\\&+(-1)^{[D]}e_{01}\otimes D^\dagger+e_{11}\otimes B^\dagger\\&=e_{00}\otimes A^\dagger+(-1)^{[D]}e_{01}\otimes D^\dagger\\&+(-1)^{[C]}e_{10}\otimes C^\dagger+e_{11}\otimes B^\dagger\end{aligned}$$

と考えることを意味している。

この接続形式1-form $\mathcal{A}$から定義されるゲージ場のfield strength $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}=d\mathcal{A}+\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$$

は、

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}F^L-W^L & -iD\phi\\ -i\left(D\phi\right)^\dagger & F^R-W^R\end{pmatrix}$$

と成分表示できる。ただし、ここで

$$F^L=dL+L\wedge L,\ F^R=dR+R\wedge R$$
$$D\phi=d\phi+L\phi-\phi R,\ \phi=\varphi+1$$
$$W^L=\phi\phi^\dagger-1,\ W^R=\phi^\dagger\phi-1$$

LおよびRはそれぞれ別の$U(N)$群のLie代数に値を持つゲージ場であり、ϕ（あるいはφ）に対してそれぞれ左からおよび右から作用する。これを$U_L(N)\times U_R(N)$ゲージ理論と呼ぶことにする。定義中に現れた1は正確には、$N\times N$単位行列$\mathbf{1}_N$であるが、ここでは特に問題ない限り単に1と表記する。このとき

$$\begin{aligned}d\mathcal{A}&=\begin{pmatrix}dA & -id\varphi\\ -id\varphi^\dagger & dR\end{pmatrix}+i\left[\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}L&0\\0&R\end{pmatrix}\right]+i\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&i\varphi\\ i\varphi^\dagger&0\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}dL & -id\varphi\\ -id\varphi^\dagger & dR\end{pmatrix}+i\left(\begin{pmatrix}0&R\\L&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&L\\R&0\end{pmatrix}\right)+i\left(\begin{pmatrix}i\varphi^\dagger&0\\0&\varphi\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}i\varphi&0\\0&i\varphi^\dagger\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}dL & -id\varphi\\ -id\varphi^\dagger & dR\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}i\left(\varphi+\varphi^\dagger\right) & -(L-R)\\ L-R & i\left(\varphi+\varphi^\dagger\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}dL-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right) & -i\left(d\varphi+(L-R)\right)\\ -i\left(d\varphi^\dagger-(L-R)\right) & dR-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}=\begin{pmatrix}L&i\varphi\\ i\varphi^\dagger&R\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}L&i\varphi\\ i\varphi^\dagger&R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L\wedge L-\varphi\varphi^\dagger & -i\left(L\varphi-\varphi R\right)\\ i\left(\varphi^\dagger L-R\varphi^\dagger\right) & -\varphi^\dagger\varphi+R\wedge R\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}=d\mathcal{A}+\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}\\&=\begin{pmatrix}dL-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right) & -i\left(d\varphi+(L-R)\right)\\ -i\left(d\varphi^\dagger-(L-R)\right) & dR-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}L\wedge L-\varphi\varphi^\dagger & -i\left(L\varphi-\varphi R\right)\\ i\left(\varphi^\dagger L-R\varphi^\dagger\right) & -\varphi^\dagger\varphi+R\wedge R\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}dL+L\wedge L-\varphi\varphi^\dagger-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right) & -i\left(d\varphi+\left(L\varphi-\varphi R\right)+(L-R)\right)\\ -id\left(d\varphi^\dagger-\left(\varphi^\dagger L-R\varphi^\dagger\right)-(L-R)\right) & dR+R\wedge R-\varphi^\dagger\varphi-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}F_L-\varphi\varphi^\dagger-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right) & -i\left(D\varphi+(L-R)\right)\\ -i\left(\left(D\varphi\right)^\dagger-(L-R)\right) & F_R-\varphi^\dagger\varphi-\left(\varphi+\varphi^\dagger\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで

$$D\varphi = d\varphi + (L\varphi - \varphi R)$$

はL, R gauge covariant derivative

$$\begin{aligned} W^L &= \varphi\varphi^\dagger + \left(\varphi + \varphi^\dagger\right) \\ &= (\varphi + 1)\left(\varphi^\dagger + 1\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^R &= \varphi^\dagger\varphi + \left(\varphi + \varphi^\dagger\right) \\ &= \left(\varphi^\dagger + 1\right)(\varphi + 1) - 1 \end{aligned}$$

ここで

$$\phi = \varphi + 1$$

に対して

$$\mathbf{D}\varphi = D\varphi + (L - R)$$

とすると

$$\mathbf{D}\varphi = D(\varphi + 1) = D\phi$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \begin{pmatrix} F^L - W^L & -i\mathbf{D}\varphi \\ -i(\mathbf{D}\varphi)^\dagger & F^R - W^R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F^L - W^L & -iD\phi \\ -i(D\phi)^\dagger & F^R - W^R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} W^L(\varphi) &= (\varphi + 1)\left(\varphi^\dagger + 1\right) - 1 = \phi\phi^\dagger - 1 \\ W^R(\varphi) &= \left(\varphi^\dagger + 1\right)(\varphi + 1) - 1 = \phi^\dagger\phi - 1 \end{aligned}$$

より、Higgsポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 = \mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 \\ &= \mathrm{tr}\left(W^L\right)^2 = \mathrm{tr}\left(W^R\right)^2 \end{aligned}$$

と表される。ここでtrはゲージ群のgeneratorに関する（規格化された）トレースである。

大変興味深いのは、Z_2空間の接続として導入されたφはHiggs場ϕから真空期待値を引き算したものであり、$M\times Z_2$空間のゲージ理論は最初から自発的に対称性が破れることが前提で、破れた後の理論を記述していることである。

この$\mathcal{F}$に対して、内積$\langle\mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle$と$\mathcal{M}$上の volume integralが定義できれば、これによってゲージ理論の作用積分が与えられると考えてよい。しかしながら、Z_2上の計量の定義が明白には与えられていないため、直接的な方法で内積$\langle\mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle$が定義されていない。そこで、$\mathcal{M}$上に適切なHodge dual $^*\mathcal{F}$の定義が与えられれば、$\mathcal{M}=M\times Z_2$上のvolume integralが与えられる考えて

$$\mathrm{tr}\int_{M\times Z_2}\langle\mathcal{F}, \mathcal{F}\rangle = \mathrm{tr}\int_{M\times Z_2}\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F}$$

によって、作用積分を構成することにする。これがうまく定義されていれば結果として次のような作用積分が得られるはずである。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{M\times Z_2}\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F} \\ =&\mathrm{tr}\int_M\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}^L\right|^2 + \frac{1}{2}\left|F_{12}^R\right|^2 + \left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 + |D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2\right)dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n \end{aligned}$$

３．Yang-Mills-Higgs系とBPS方程式

２次元のYang-Mills-Higgs系のボルテックス解を与えるBPS方程式について、その導出を見ておく。２次元ユークリッド空間R^2上のYang-Mills-Higgs系の作用積分は、３次元ミンコフスキー空間上のYang-Mills-Higgs系のエネルギー積分と形式的には同じである。したがって、３次元Yang-Mills-Higgs系の静的な最低エネルギー解とR^2上の最小作用解は同等と考えることが出来る。ここでは、そのようなR^2上の最小作用解として、BPS方程式として知られる１階微分方程式をみたすものが存在することを見ておこう。

３．１．２次元Yang-Mills-Higgs系

ゲージ場が１種類の場合、２次元ユークリッド空間R^2上のYang-Mills-Higgs系の作用積分（あるいは、３次元理論のエネルギー積分）は

$$S=\int dx_1dx_2\mathrm{tr}$$
$$\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}\right|^2+\left|D_1\phi\right|^2+\left|D_2\phi\right|^2+\frac{1}{2}\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\right)$$

である。ここで

$$D_\mu\phi=\partial_\mu\phi+A_\mu\phi$$
$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+[A_\mu,A_\nu]$$

本稿で採用している定義では、differential form表現で、covariant derivative Dおよび field strength Fは

$$D=d+A,$$
$$F=dA+A\wedge A$$

であるため、座標表示をするならば、上の定義となる。この場合$A_\mu,F_{\mu\nu}$ともにanti-hermiteであることに注意が必要である。場の理論での一般的なcovariant derivativeの定義は

$$D_\mu=\partial_\mu-iA_\mu,$$

で、Lie代数の要素をあらわに書いて

$$D_\mu=\partial_\mu+A_\mu^a\frac{\lambda^a}{2i},$$
$$F_{\mu\nu}^a=\partial_\mu A_\nu^a-\partial_\nu A_\mu^a+f_{abc}A_\mu^bA_\nu^c$$

のようにしてhermiteのA_μ^a, $F_{\mu\nu}^a$を用いることが多いので、適宜定義を変更して本稿と対応させる必要がある。

３．２．BPS方程式

上で示した作用積分を極小化する１階微分方程式、すなわちBPS方程式が存在することを導こう。

まず$|D_1\phi|^2$と$|D_2\phi|^2$を１つの絶対値の平方式にまとめる。

$|(D_1 \pm iD_2)\phi|_2$は

$$\begin{aligned}&\left|\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right|^2\\&=\left(\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right)^\dagger\left(\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right)\\&=\left(\left(D_1\phi\right)^\dagger\mp i\left(D_2\phi\right)^\dagger\right)\left(D_1\phi\pm iD_2\phi\right)\\&=\left|D_1\phi\right|^2+\left|D_2\phi\right|^2\\&\pm i\left(D_1\phi\right)^\dagger D_2\phi\mp i\left(D_2\phi\right)^\dagger D_1\phi\end{aligned}$$

と展開できるので、

$$\begin{aligned}&\left|D_1\phi\right|^2+\left|D_2\phi\right|^2\\&=\left|\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right|^2\\&\mp i\left(\left(D_1\phi\right)^\dagger D_2\phi-\left(D_2\phi\right)^\dagger D_1\phi\right)\end{aligned}$$

となる。ここでcovariant derivativeの性質

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(D\phi\right)^\dagger D\phi\\&=\mathrm{tr}\partial\left(\phi^\dagger D\phi\right)-\mathrm{tr}\phi^\dagger\left(D\left(D\phi\right)\right)\end{aligned}$$

を用いて

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(\left(D_1\phi\right)^\dagger D_2\phi-\left(D_2\phi\right)^\dagger D_1\phi\right)\\&=-\mathrm{tr}\phi^\dagger\left[D_1,D_2\right]\phi\\&+\mathrm{tr}\left(\partial_1\left(\phi^\dagger D_2\phi\right)-\mathrm{tr}\partial_1\left(\phi^\dagger D_2\phi\right)\right)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(|D_1\phi|^2+|D_2\phi|^2\right)\\
&=\mathrm{tr}\left|(D_1\pm iD_2)\,\phi\right|^2\\
&\pm i\mathrm{tr}\phi^\dagger\left[D_1,D_2\right]\phi\pm i\mathrm{tr}\varepsilon_{ij}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\\
&=\mathrm{tr}\left|(D_1\pm iD_2)\,\phi\right|^2\\
&\pm i\mathrm{tr}\phi^\dagger F_{12}\phi\pm i\mathrm{tr}\varepsilon_{ij}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)
\end{aligned}$$

のように、１つの絶対値の平方式と残りの項にまとめられる。

したがって、表面積分を無視すると、前節で登場したR^2上のYang-Mills-Higgs系の作用積分は

$$S=\int dx_1dx_2\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}\right|^2+\left|(D_1\pm iD_2)\,\phi\right|^2+\frac{1}{2}\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\pm i\phi^\dagger F_{12}\phi\right)$$

となる。次に、$|F_{12}|^2$と$(\phi\phi^\dagger-1)^2$を１つの絶対値の平方式にまとめる。ここで

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|F_{12}\right|^2+\mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\\
&=\mathrm{tr}\left|iF_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|\mp 2i\mathrm{tr}F_{12}\left(\phi\phi^\dagger-1\right)
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|F_{12}\right|^2+\mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\pm 2i\mathrm{tr}F_{12}\left(\phi\phi^\dagger\right)\\
&=\mathrm{tr}\left|iF_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2\pm 2iF_{12}
\end{aligned}$$

であるから

$$S=\int dx_1dx_2\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\left|iF_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2\left|(D_1\pm iD_2)\,\phi\right|^2\pm iF_{12}\right)$$

$$\begin{aligned}
S=&\int dx_1dx_2\mathrm{tr}\\
&\left(\frac{1}{2}\left|iF_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2+\left|(D_1\pm iD_2)\,\phi\right|^2\right)\\
&\pm i\int dx_1dx_2\mathrm{tr}F_{12}
\end{aligned}$$

最後の項はR^2上ではトポロジカルな不変量であり境界条件を固定した変分に関与しないため、運動方程式に寄与しない。このとき１階微分方程式（BPS方程式）

$$iF_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)=0$$
$$(D_1\pm iD_2)\,\phi=0$$

を満たす解はユークリッドの作用（またはエネルギー積分）を最小化し、場の方程式を自動的に満たしている。導出されたトポロジカルな項は、hermitianなゲージ場の成分で表すと

$$\begin{aligned}
&i\int dx_1dx_2\mathrm{tr}F_{12}\\
&=i\int dx_1dx_2\mathrm{tr}F_{12}^a\frac{\lambda^a}{2i}\\
&=\int dx_1dx_2F_{12}^a\mathrm{tr}\frac{\lambda^a}{2}
\end{aligned}$$

３．３．$U_L(N)\times U_R(N)$Yang-Mills-Higgs

$M\times Z_2$上のゲージ理論では自然に２種類のゲージ場が導入されるので、対応を確かめるために、ゲージ場が２種類の場合のBPS方程式の導出を見ることにする。２種類のゲージ場を持つR^2上の$U_L(N)\times U_R(N)$ Yang-Mills-Higgs系の作用積分は

$$S=\int dx_1dx_2\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}^L\right|^2+\frac{1}{2}\left|F_{12}^R\right|^2+\left|D_1\phi\right|^2+\left|D_2\phi\right|^2+\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\right)$$

ここで

$$
\begin{aligned}
D_\mu\phi &= \partial_\mu\phi + L_\mu\phi - \phi R_\mu \\
F^L_{\mu\nu} &= \partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu + [L_\mu, L_\nu] \\
F^R_{\mu\nu} &= \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu + [R_\mu, R_\nu]
\end{aligned}
$$

である。この場合も

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2\right) \\
&= \mathrm{tr}\left|(D_1 \pm iD_2)\,\phi\right|^2 \\
&\pm i\mathrm{tr}\phi^\dagger\,[D_1, D_2]\,\phi \\
&\pm i\mathrm{tr}\varepsilon_{ij}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)
\end{aligned}
$$

であるが、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\phi^\dagger\,[D_1, D_2]\,\phi \\
&= \mathrm{tr}\phi^\dagger\left(F^L_{12}\phi - \phi F^R_{12}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(F^L_{12}\phi\phi^\dagger - \phi^\dagger\phi F^R_{12}\right)
\end{aligned}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2\right) \\
&= \mathrm{tr}\left|(D_1 \pm iD_2)\,\phi\right|^2 \\
&\pm i\mathrm{tr}\left(F^L_{12}\phi\phi^\dagger - \phi^\dagger\phi F^R_{12}\right) \\
&\pm i\mathrm{tr}\varepsilon_{ij}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 \\
&= \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger\phi\phi^\dagger - 2\phi\phi^\dagger + 1\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger\phi\phi^\dagger - 2\phi\phi^\dagger + 1\right) \\
&= \mathrm{tr}\phi\phi^\dagger\phi\phi^\dagger - 2\mathrm{tr}\phi\phi^\dagger + \mathrm{tr}1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\phi\phi^\dagger\phi\phi^\dagger + \mathrm{tr}\phi^\dagger\phi\phi^\dagger\phi\right) \\
&- \left(\mathrm{tr}\phi\phi^\dagger + \mathrm{tr}\phi^\dagger\phi\right) + \mathrm{tr}1 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger\phi\phi^\dagger - 2\phi\phi^\dagger + 1\right) \\
&+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\phi\phi^\dagger\phi - 2\phi^\dagger\phi + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 + \mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

表面積分を無視してSは

$$
\begin{aligned}
S = &\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr} \\
&\left(\frac{1}{2}\left|F^L_{12}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|F^R_{12}\right|^2 + \left|(D_1 \pm iD_2)\,\phi\right|^2\right. \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 \\
&\quad\quad \left.\pm\, i\left(F^L_{12}\phi\phi^\dagger - \phi^\dagger\phi F^R_{12}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|iF^L_{12} \pm \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 \\
&= \mathrm{tr}\left|F^L_{12}\right|^2 + \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 \pm 2i\mathrm{tr}F^L_{12}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)
\end{aligned}
$$

を利用して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|F^L_{12}\right|^2 + \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 \\
&= \mathrm{tr}\left|iF^L_{12} \pm \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 \mp 2i\mathrm{tr}F^L_{12}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|F^R_{12}\right|^2 + \mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 \\
&= \mathrm{tr}\left|iF^R_{12} \mp \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 \pm 2i\mathrm{tr}F^R_{12}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)
\end{aligned}
$$

と出来るので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left|F^L_{12}\right|^2 + \mathrm{tr}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right)^2 + \mathrm{tr}\left|F^R_{12}\right|^2 + \mathrm{tr}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 \\
&= \mathrm{tr}\left|iF^L_{12} \pm \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 + \mathrm{tr}\left|iF^R_{12} \mp \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 \\
&\mp 2i\mathrm{tr}F^L_{12}\left(\phi\phi^\dagger - 1\right) \pm 2i\mathrm{tr}F^R_{12}\left(\phi^\dagger\phi - 1\right) \\
&= \mathrm{tr}\left|iF^L_{12} \pm \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 + \mathrm{tr}\left|iF^R_{12} \mp \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)\right|^2 \\
&\mp 2i\mathrm{tr}\left(F^L_{12}\phi\phi^\dagger - F^R_{12}\phi^\dagger\phi\right) \pm 2i\mathrm{tr}\left(F^L_{12} - F^R_{12}\right)
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
S=&\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr}\\
&\left(\frac{1}{2}\left|iF^L_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|iF^R_{12}\mp\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2\right.\\
&\left.+\left|\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right|^2\pm i\mathrm{tr}\left(F^L_{12}-F^R_{12}\right)\right)\\
=&\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr}\\
&\left(\frac{1}{2}\left|iF^L_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2+\frac{1}{2}\left|iF^R_{12}\mp\left(\phi\phi^\dagger-1\right)\right|^2\right.\\
&\left.+\left|\left(D_1\pm iD_2\right)\phi\right|^2\right)\\
&\pm i\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr}\left(F^L_{12}-F^R_{12}\right)
\end{aligned}
$$

BPS方程式は

$$
\begin{aligned}
iF^L_{12}\pm\left(\phi\phi^\dagger-1\right)&=0\\
iF^R_{12}\mp\left(\phi^\dagger\phi-1\right)&=0\\
\left(D_1\pm iD_2\right)\phi&=0
\end{aligned}
$$

トポロジカルな不変量項は、hermitianなゲージ場の成分で表すと

$$
\begin{aligned}
&\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr}i\left(F^L_{12}-F^R_{12}\right)\\
&=\int dx_1 dx_2 \mathrm{tr}i\left(\left(F^L_{12}\right)^a-\left(F^R_{12}\right)^a\right)\frac{\lambda^a}{2i}\\
&=\int dx_1 dx_2\left(\left(F^L_{12}\right)^a-\left(F^R_{12}\right)^a\right)\mathrm{tr}\frac{\lambda^a}{2}
\end{aligned}
$$

４．$R^2\times Z_2$ Yang-Mills系

ここから先は、Yang-Mills-Higgs系との対応を考えるためMとしては２次元の空間R^2に限って考えることにする。

４．１．$R^2\times Z_2$ 空間上の自己双対方程式

$\mathcal{F}$は$\mathcal{M}_4 = R^2\times Z_2$の2-formであるから、まず$Z_2$の0, 1, 2-formの基底1, (τ_1, τ_2) ,$i\tau_3$で分解すると

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} F^L-W^L & -iD\phi\\ -i\left(D\phi\right)^\dagger & F^R-W^R\end{pmatrix}\\
&=\mathbf{1}\otimes\left(\frac{F^L+F^R}{2}-\frac{W^L+W^R}{2}\right)\\
&+i\tau_3\otimes(-i)\left(\frac{F^L-F^R}{2}-\frac{W^L-W^R}{2}\right)\\
&-i\left(\tau_1\otimes\frac{D\phi+\left(D\phi\right)^\dagger}{2}-\tau_2\otimes\frac{D\phi-\left(D\phi\right)^\dagger}{2i}\right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\mathcal{F}=\mathcal{F}^{(0,0)}+\mathcal{F}^{(2,2)}+\mathcal{F}^{(2,0)}+\mathcal{F}^{(0,2)}+\mathcal{F}^{(1,1)}
$$

のような混成formであることがわかる。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(2,0)}=&\mathbf{1}\otimes\left(\frac{F^L+F^R}{2}\right)\\
\mathcal{F}^{(0,0)}=&\mathbf{1}\otimes\left(-\frac{W^L+W^R}{2}\right)\\
\mathcal{F}^{(0,2)}=&i\tau_3\otimes(-i)\left(-\frac{W^L-W^R}{2}\right)\\
\mathcal{F}^{(2,2)}=&i\tau_3\otimes(-i)\left(\frac{F^L-F^R}{2}\right)\\
\mathcal{F}^{(1,1)}=&-i\left(\tau_1\otimes\left(\frac{D\phi+\left(D\phi\right)^\dagger}{2}\right)\right.\\
&\left.+\tau_2\otimes i\left(\frac{D\phi-\left(D\phi\right)^\dagger}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

「4次元空間」$\mathcal{M}_4$の1-formの基底の内

$$
dx^3=\tau^1, dx^4=\tau^2
$$

のようにZ_2空間に割り当てて

$$
dx^\mu=\left(dx^1, dx^2, \tau^1, \tau^2\right)
$$

と考えると、トータル2-formに関しては、その成分は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{12}&=\frac{1}{2}\left(F^L_{12}+F^R_{12}\right)\\
\mathcal{F}_{34}&=\frac{i}{2}\left(W^L-W^R\right)
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{F}_{31} = -\frac{i}{2}\left(D_1\phi + (D_1\phi)^\dagger\right)$$
$$\mathcal{F}_{32} = -\frac{i}{2}\left(D_2\phi + (D_2\phi)^\dagger\right)$$

$$\mathcal{F}_{41} = \frac{1}{2}\left(D_1\phi - (D_1\phi)^\dagger\right)$$
$$\mathcal{F}_{42} = \frac{1}{2}\left(D_2\phi - (D_2\phi)^\dagger\right)$$

であるが、これ以外に、0-form

$$\mathcal{F}^0 = -\frac{1}{2}\left(W^L + W^R\right)$$

と4-form

$$\mathcal{F}^4_{3412} = -\frac{i}{2}\left(F^L_{12} - F^R_{12}\right)$$

が存在している。

$\mathcal{M}_4$のHodge dualは2-formに関しては

$$^*\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma}$$

であるから

$$^*\mathcal{F}_{12} = \mathcal{F}_{34} = \frac{i}{2}\left(W^L - W^R\right)$$
$$^*\mathcal{F}_{34} = \mathcal{F}_{12} = \frac{1}{2}\left(F^L_{12} + F^R_{12}\right)$$

$$^*\mathcal{F}_{31} = \mathcal{F}_{42} = \frac{1}{2}\left(D_2\phi - (D_2\phi)^\dagger\right)$$
$$^*\mathcal{F}_{32} = \mathcal{F}_{14} = -\frac{1}{2}\left(D_1\phi - (D_1\phi)^\dagger\right)$$

$$^*\mathcal{F}_{41} = \mathcal{F}_{23} = \frac{i}{2}\left(D_2\phi + (D_2\phi)^\dagger\right)$$
$$^*\mathcal{F}_{42} = \mathcal{F}_{31} = -\frac{i}{2}\left(D_1\phi + (D_1\phi)^\dagger\right)$$

となる。また、0-form, 4-formについては

$$^*\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}^4_{1234} = -\frac{i}{2}\left(F^L_{12} - F^R_{12}\right)$$
$$^*\mathcal{F}^4_{1234} = \mathcal{F}^0 = -\frac{1}{2}\left(W^L + W^R\right)$$

と考えるのが自然である。

　これらのことから、$\mathcal{M}_4$のSelf-Dual Yang-Mills (SDYM) equation

$$^*\mathcal{F} = \pm\mathcal{F}$$

は、成分では

$$^*\mathcal{F}_{12} = \pm\mathcal{F}_{12} \quad (^*\mathcal{F}_{34} = \pm\mathcal{F}_{34})$$

から

$$\frac{1}{2}\left(F^L_{12} + F^R_{12}\right) = \pm\frac{i}{2}\left(W^L - W^R\right)$$

$$^*\mathcal{F}_{31} = \pm\mathcal{F}_{31} \quad (^*\mathcal{F}_{42} = \pm\mathcal{F}_{42}),$$
$$^*\mathcal{F}_{32} = \pm\mathcal{F}_{32} \quad (^*\mathcal{F}_{41} = \pm\mathcal{F}_{41})$$

より

$$\frac{1}{2}\left(D_2\phi - (D_2\phi)^\dagger\right) = \pm - \frac{i}{2}\left(D_1\phi + (D_1\phi)^\dagger\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left(D_1\phi - (D_1\phi)^\dagger\right) = \pm - \frac{i}{2}\left(D_2\phi + (D_2\phi)^\dagger\right)$$

および、

$$^*\mathcal{F}^0 = \pm\mathcal{F}^0 \quad \left(^*\mathcal{F}^4_{1234} = \pm\mathcal{F}^4_{1234}\right)$$

より

$$\frac{i}{2}\left(F^L_{12} - F^R_{12}\right) = \pm-\frac{1}{2}\left(W^L + W^R\right)$$

を得る。ϕに関する部分は

$$(D_2\phi \pm iD_1\phi) - (D_2\phi \pm iD_1\phi)^\dagger = 0$$
$$-(D_1\phi \pm iD_2\phi) + (D_1\phi \pm iD_2\phi)^\dagger = 0$$

となり

$$(D_1\phi \pm iD_2\phi) + (D_1\phi \pm iD_2\phi)^\dagger = 0$$
$$-(D_1\phi \pm iD_2\phi) + (D_1\phi \pm iD_2\phi)^\dagger = 0$$

したがって

$$D_1\phi \pm iD_2\phi = 0$$

にまとまる。これ以外からは

$$i\left(F^L_{12} + F^R_{12}\right) = \pm - \left(W^L - W^R\right)$$
$$i\left(F^L_{12} - F^R_{12}\right) = \pm - \left(W^L + W^R\right)$$

したがって

$$iF_{12}^L \pm W^L = 0$$
$$iF_{12}^R \mp W^R = 0$$
$$(D_1 \pm iD_2)\,\phi = 0$$

として BPS方程式が得られる。

４．２．$R^2 \times Z_2$ インスタントンとボルテックス

$\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$を積分したものは「４次元空間」$\mathcal{M}_4 = R^2 \times Z_2$のトポロジカルな不変量であり、いわゆるインスタントン数に比例する。$\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$には様々なdegreeのformが混在しているので、その中から$R^2 \times Z_2$のvolume form $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2$になっているものを取り出せばよい。$Z_2$空間の1-formの基底 θ^1, θ^2としては

$$\theta^1 = \tau_1,\ \theta^2 = \tau_2$$

をとると

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = i\tau_3$$

であり、これがZ_2空間の2-formの基底であり、すなわち Z_2空間のvolume formである。

したがって、$\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$から$R^2 \times Z_2$のvolume form $dx^1 \wedge dx^2 \wedge \theta^1 \wedge \theta^2 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge i\tau_3$を取り出すには、$\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$に$-i\tau_3$を掛けてトレースを取り$R^2$の2-formを取り出せばよいことがわかる。

実際には、

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0,0)} + \mathcal{F}^{(2,0)} + \mathcal{F}^{(0,2)} + \mathcal{F}^{(2,2)} + \mathcal{F}^{(1,1)}$$

のようなformの集まりで、$\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$の中で必要なのは

$$2\mathcal{F}^{(0,0)} \wedge \mathcal{F}^{(2,2)} + 2\mathcal{F}^{(0,2)} \wedge \mathcal{F}^{(2,0)} + \mathcal{F}^{(1,1)} \wedge \mathcal{F}^{(1,1)}$$

の部分だけ。これ以外に$\theta^1 \wedge \theta^2 = i\tau_3$に比例する項は $2\mathcal{F}^{(2,0)} \wedge \mathcal{F}^{(2,2)}$ であるが、これはR^2の4-formなので、後で排除すればよい。Z_2空間のmatrix formのトレースをTr、Lie代数のトレースをtrと表すと

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\mathrm{Tr}\tau_3 \mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\\
=&\mathrm{tr}\mathrm{Tr}\tau_3 \left\{ \begin{pmatrix} F^L - W^L & -iD\phi \\ -i\,(D\phi)^\dagger & F^R - W^R \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F^L - W^L & -iD\phi \\ -i\,(D\phi)^\dagger & F^R - W^R \end{pmatrix} \right\}\\
=&\mathrm{tr}\mathrm{Tr}\tau_3 \begin{pmatrix} \left(F^L - W^L\right) \wedge \left(F^L - W^L\right) + D\phi \wedge (D\phi)^\dagger & -i\left(F^L - W^L\right) \wedge D\phi - iD\phi \wedge \left(F^R - W^R\right) \\ -i\,(D\phi)^\dagger \wedge \left(F^L - W^L\right) - i\left(F^R - W^R\right) \wedge (D\phi)^\dagger & (D\phi)^\dagger \wedge D\phi + \left(F^R - W^R\right) \wedge \left(F^R - W^R\right) \end{pmatrix}\\
=&\mathrm{tr}\left(F^L - W^L\right) \wedge \left(F^L - W^L\right) + \mathrm{tr}D\phi \wedge (D\phi)^\dagger - \mathrm{tr}\,(D\phi)^\dagger \wedge D\phi - \mathrm{tr}\left(F^R - W^R\right) \wedge \left(F^R - W^R\right)\\
=&\mathrm{tr}\left(F^L - W^L\right) \wedge \left(F^L - W^L\right) - \mathrm{tr}\left(F^R - W^R\right) \wedge \left(F^R - W^R\right) - 2\mathrm{tr}\,(D\phi)^\dagger \wedge D\phi\\
=&\left(\mathrm{tr}F^L \wedge F^L - 2\mathrm{tr}F^L W^L + \mathrm{tr}\left(W^L\right)^2\right) - \left(\mathrm{tr}F^R \wedge F^R - 2\mathrm{tr}F^R W^R + \mathrm{tr}\left(W^R\right)^2\right) - 2\mathrm{tr}\,(D\phi)^\dagger \wedge D\phi
\end{aligned}
$$

$$W^L = \phi\phi^\dagger - 1, W^R = \phi^\dagger\phi - 1$$
$$\mathrm{tr}\left(W^L\right)^2 = \mathrm{tr}\left(W^R\right)^2 = V$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\tau_3 \mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\\
&= \left(\mathrm{tr}F^L \wedge F^L - \mathrm{tr}F^R \wedge F^R\right)\\
&- 2\left(\mathrm{tr}F^L W^L - \mathrm{tr}F^R W^R\right) - 2\mathrm{tr}\,(D\phi)^\dagger \wedge D\phi
\end{aligned}
$$

R^2としては2-formまでをとるので、4-formである$\mathrm{tr}F^L\wedge F^L$などは除いてよい。したがって

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\tau_3 F^L\wedge F^L\\&=-2\left(\mathrm{tr}F^LW^L-\mathrm{tr}F^RW^R\right)\\&-2\mathrm{tr}\left(D\phi\right)^\dagger\wedge D\phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-2\left(\mathrm{tr}F^LW^L-\mathrm{tr}F^RW^R\right)\\&=-2\left(\mathrm{tr}F^L_{12}W^L-\mathrm{tr}F^R_{12}W^R\right)dx^1\wedge dx^2\\&=2\left(\mathrm{tr}F^L_{12}-\mathrm{tr}F^R_{12}\right)dx^1\wedge dx^2\\&-2\left(\mathrm{tr}F^L_{12}\phi\phi^\dagger-\mathrm{tr}F^R_{12}\phi^\dagger\phi\right)dx^1\wedge dx^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(D\phi\right)^\dagger\wedge D\phi\\&=\mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger D_j\phi dx^i\wedge dx^j\\&=\mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger D_j\phi\varepsilon^{ij}dx^1\wedge dx^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger D_j\phi\varepsilon^{ij}\\&=\mathrm{tr}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\varepsilon^{ij}-\mathrm{tr}\phi^\dagger D_iD_j\phi\varepsilon^{ij}\\&=\mathrm{tr}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\varepsilon^{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\phi^\dagger\left[D_i,D_j\right]\phi\varepsilon^{ij}\\&=\mathrm{tr}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\varepsilon^{ij}-\frac{1}{2}\mathrm{tr}\phi^\dagger\left(F^L_{ij}\phi-\phi F^R_{ij}\right)\varepsilon^{ij}\\&=\mathrm{tr}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\varepsilon^{ij}-\mathrm{tr}\phi^\dagger\left(F^L_{12}\phi-\phi F^R_{12}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\tau_3\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\\&=\left(\mathrm{tr}F^L_{12}-\mathrm{tr}F^R_{12}\right)dx^1\wedge dx^2\\&-2\mathrm{tr}\partial_i\left(\phi^\dagger D_j\phi\right)\varepsilon^{ij}dx^1\wedge dx^2\end{aligned}$$

となるので、boundary termを捨てて、結局

$$\begin{aligned}&-\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\\&=i\int_{R^2}\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\tau_3\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}\\&=i\int_{R^2}\left(\mathrm{tr}F^L_{12}-\mathrm{tr}F^R_{12}\right)dx^1\wedge dx^2\end{aligned}$$

を得る。ここで最後は成分表示

$$F^L=\frac{F^{La}_{ij}}{2}\frac{\lambda_a}{2i}dx^i\wedge dx^j=F^{La}_{12}\frac{\lambda_a}{2i}dx^1\wedge dx^2$$

を用いた。（成分で表したF^L_{12}はanti-hermiteとなる記法をとっていることに注意）

この結果から、$R^2\times Z_2$上の「インスタントン数」はR^2上のボルテックス数 =（Lボルテックス数 −Rボルテックス数）に等しいことがわかる。volume formとしてトポロジカルな不変量を与えることから結果として、$R^2\times Z_2$上のvolume integral

$$\int_{Z_2}()$$

として

$$-\frac{i}{2}\mathrm{Tr}\tau_3\ ()$$

を採用することを正当化していると考えられる。

上の計算は、BPS方程式を出すときの計算の一部と同じである。それは以下のことからもわかる。

普通のYang-Millsの作用積分は、formで書くと

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int F\wedge^* F$$

これを

$$\begin{aligned}&\left(F\pm^* F\right)\wedge^*\left(F\pm^* F\right)\\&=2F\wedge^* F-2F\wedge F\geq 0\end{aligned}$$

を利用して

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int F\wedge^* F\\&=\mathrm{tr}\int\left(F\pm^* F\right)\wedge^*\left(F\pm^* F\right)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int F\wedge F\\&\geq\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int F\wedge F=2\pi^2k\end{aligned}$$

したがって BPS境界は

$$F\pm^* F=0$$

のときに作用が最小値をとる。

先の計算では、$R^2\times Z_2$の場合には

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F}$$
$$=\mathrm{tr}\int_{R^2}\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}^L\right|^2+\frac{1}{2}\left|F_{12}^R\right|^2+|D_1\phi|^2+|D_2\phi|^2+\left(\phi\phi^\dagger-1\right)^2\right)$$

と考えて、この作用積分のBPS boundを求める計算をしたので、実質

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F}$$
$$=\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}(\mathcal{F}\pm^*\mathcal{F})\wedge^*(\mathcal{F}\pm^*\mathcal{F})+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$$

の計算を行い、平方完成してBPS boundをみたす場合の残りである

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge\mathcal{F}$$

の項を成分で計算したことになっている。

4．3．$R^2\times Z_2$上のYang-Mills作用積分

上の計算方法から、作用積分の導出方法が明確になる。前章で成分を用いて定義した　$\mathcal{M}_4=R^2\times Z_2$上　のHodge dual *はmatrix differential formに対しては

$$^*\mathcal{F}\equiv i\tau_3\mathcal{F}\,(^*)$$

によって定義できる。ここで$\mathcal{F}$ $(^*)$は成分となっているR^2のformのHodge dualを意味するものとする。この定義を用いて

$$\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F}$$
$$=\mathrm{Tr}\tau_3\mathcal{F}\wedge\tau_3\mathcal{F}\,(^*)$$
$$=\mathrm{Tr}\tau_3\left\{\begin{pmatrix}F^L-W^L & -iD\phi\\ -i(D\phi)^\dagger & F^R-W^R\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}^*\left(F^L-W^L\right) & -i^*(D\phi)\\ i^*(D\phi)^\dagger & -^*\left(F^R-W^R\right)\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\mathrm{Tr}\tau_3\begin{pmatrix}\left(F^L-W^L\right)\wedge^*\left(F^L-W^L\right)-D\phi\wedge^*(D\phi)^\dagger & -i\left(F^L-W^L\right)\wedge^*(D\phi)+iD\phi\wedge^*\left(F^R-W^R\right)\\ -i(D\phi)^\dagger\wedge^*\left(F^L-W^L\right)+i\left(F^R-W^R\right)\wedge^*(D\phi)^\dagger & (D\phi)^\dagger\wedge^*(D\phi)-\left(F^R-W^R\right)\wedge^*\left(F^R-W^R\right)\end{pmatrix}$$
$$=\mathrm{tr}\left(F^L-W^L\right)\wedge^*\left(F^L-W^L\right)-\mathrm{tr}D\phi\wedge^*(D\phi)^\dagger-\mathrm{tr}(D\phi)^\dagger\wedge^*(D\phi)+\mathrm{tr}\left(F^R-W^R\right)\wedge^*\left(F^R-W^R\right)$$
$$=\mathrm{tr}\left(F^L-W^L\right)\wedge\left(F^L-W^L\right)+\mathrm{tr}\left(F^R-W^R\right)\wedge\left(F^R-W^R\right)-2\mathrm{tr}(D\phi)^\dagger\wedge D\phi$$
$$=\left(\mathrm{tr}F^L\wedge^*F^L-2\mathrm{tr}F^L\wedge^*W^L+\mathrm{tr}W^L\wedge^*W^L\right)$$
$$+\left(\mathrm{tr}F^R\wedge^*F^R-2\mathrm{tr}F^R\wedge^*W^R+\mathrm{tr}W^R\wedge^*W^R\right)-2\mathrm{tr}(D\phi)^\dagger\wedge^*(D\phi)$$

こんどは4-formである$\mathrm{tr}F^L\wedge^*W^L$などは除いて

$$\mathrm{Tr}\tau_3\mathcal{F}\wedge^*\mathcal{F}$$
$$=\left(\mathrm{tr}F^L\wedge^*F^L+\mathrm{tr}W^L\wedge^*W^L\right)$$
$$+\left(\mathrm{tr}F^R\wedge^*F^R+\mathrm{tr}W^R\wedge^*W^R\right)$$
$$-2\mathrm{tr}(D\phi)^\dagger\wedge^*(D\phi)$$

$$\mathrm{tr}F^L\wedge^*F^L$$
$$=\mathrm{tr}\frac{1}{2}F_{ij}^Ldx^i\wedge dx^j\frac{1}{2}\varepsilon_{lk}F_{kl}^L$$
$$=-\mathrm{tr}\left(F_{12}^L\right)^2dx^1\wedge dx^2$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}W^L \wedge^* W^L\\&= \mathrm{tr}W^L \wedge \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}W^L dx^i \wedge dx^j\\&= \mathrm{tr}\left(W^L\right)^2 dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(D\phi\right)^\dagger \wedge^* \left(D\phi\right)\\&= \mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger dx^i \wedge \varepsilon_{jk}\left(D_k\phi\right)dx^j\\&= \mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger \left(D_k\phi\right)\varepsilon_{jk}\varepsilon^{ij}dx^1 \wedge dx^2\\&= -\mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger \left(D_k\phi\right)\delta_{ki}dx^1 \wedge dx^2\\&= -\mathrm{tr}\left(D_i\phi\right)^\dagger \left(D_i\phi\right)dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\tau_3\mathcal{F} \wedge^* \mathcal{F}\\&= \mathrm{tr}\Big(-\left(F_{12}^L\right)^2 - \left(F_{12}^R\right)^2 + \left(W^L\right)^2 + \left(W^R\right)^2\\&+2\left(D_i\phi\right)^\dagger \left(D_i\phi\right)\Big)dx^1 \wedge dx^2\end{aligned}$$

となり、先に示した作用積分が下のように得られる。

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}\int_{R^2\times Z_2}\mathcal{F} \wedge^* \mathcal{F} = \mathrm{tr}\int_{R^2}\left(\frac{1}{2}\left|F_{12}^L\right|^2 + \frac{1}{2}\left|F_{12}^R\right|^2 + \left(\phi^\dagger\phi - 1\right)^2 + \left|D_1\phi\right|^2 + \left|D_2\phi\right|^2\right)dx^1 \wedge dx^2$$

5．いくつかの注意点

5．1． Hodge dualの定義

前章の計算では、R^2のformのHodge dualは

$$\begin{array}{llcll}\text{2-form} & F = \frac{1}{2}F_{ij}dx^i \wedge dx^j & \to & {}^*F = \frac{1}{2}\varepsilon_{ji}F_{ij} = -F_{12} & \text{0-form}\\ \text{1-form} & V = V_i dx^i & \to & {}^*V = \varepsilon_{ij}V_j dx^i & \text{1-form}\\ \text{0-form} & W & \to & {}^*W = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}W dx^i \wedge dx^j & \text{2-form}\end{array}$$

であるとしている。

このように定義しておかないと任意のformに対してHodge dualを２回行った場合の符号が同一に定まらない。実際この定義では、どの次数のformに対しても$^{**}=-1$となっている。R^4のformのHodge dualについては

$$\begin{array}{llcll}\text{4-form} & \chi = \frac{1}{4!}\chi_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma & \to & {}^*\chi = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\chi_{\mu\nu\rho\sigma} & \text{0-form}\\ \text{3-form} & H = \frac{1}{3!}H_{\mu\nu\rho}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho & \to & {}^*H = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H_{\nu\rho\sigma}dx^\mu & \text{1-form}\\ \text{2-form} & F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu & \to & {}^*F = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}dx^\mu \wedge dx^\nu & \text{2-form}\\ \text{1-form} & V = V_\mu dx^\mu & \to & {}^*V = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}V_\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho & \text{3-form}\\ \text{0-form} & W & \to & {}^*W = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma & \text{4-form}\end{array}$$

であり、$^{**}=1$となっている。
（Minkowski空間の時は$^{**}=-1$）
微分幾何で一般的なHodge dualの定義に基づくと$^{**}\varphi = (-1)^{p(n-p)}\varphi$となっている（$n$は空間の次元, pは微分形式φの次数)。この定義では、その次元の空間の任意の次数のformに

対して**の符号が同一とは限らない、むしろ次数の偶奇によって入れ替わる。この定義は現在考えているmatrix formを含む場合には都合が良くないように見えるので、本稿では**の符号が次元によって固定される定義を行っている。

R^4では、*の演算の固有値は±1なので、2-form Fに対して

$$F_{\pm} = F \pm {}^*F$$

と定義することで

$${}^*F_{\pm} = \pm F_{\pm}$$

となる固有状態である(anti-)selfdualな2-form F±が定義できる。

R^2では、*の演算の固有値は ±iなので、1-form Vに対して

$$V_{\pm} = V \mp i^*V$$

と定義することで

$${}^*V_{\pm} = \pm i V_{\pm}$$

となる固有状態である(anti-)selfdualな1-form V±が定義できる。成分表示では

$$(V_{\pm})_1 = V_1 \mp iV_2$$
$$(V_{\pm})_2 = V_2 \pm iV_1 = \pm i\,(V_1 \mp iV_2) = \pm i\,(V_{\pm})_1$$

となっている。$V_i = D_i\phi$の場合この組み合わせは

$$(V_{\pm})_1 = D_1\phi \mp iD_2\phi$$

である。ゲージ場と結合していない場合これは

$$\partial_1\phi \mp i\partial_2\phi$$

であるから、R^2ではselfdual (anti-selfdual)は、holomorphic (anti-holomorphic)と関係していることがわかる。

５．２．$R^2 \times Z_2$上のHodge dual

通常の多様体M上の微分形式では、dx^{μ}は共変ベクトルの基底でありp-form αは

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$$

反対称p階テンソルを表している。反変ベクトルを表現するには双対基底$\dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}}$（こちらがtangent vector bundle $T\,(M)$）を用いるが、両者の間には内積が導入され

$$\left\langle dx^{\mu}, \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\rangle = \delta^{\mu}_{\nu}$$

を満たしている。Hodge dualは

$$\langle \alpha, \beta \rangle \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n = \alpha \wedge {}^*\beta$$

となるように$^*\beta$を定めてβのHodge dualと定義するので、正確には双対基底と内積が導入される必要がある。このため、通常のformの場合には、成分で考えた方が計算しやすい。

matrix formの場合は、$T^*(M)$の基底θ^aに対して双対な$T\,(M)$の基底をe_aとすると

$$\langle \theta^a, e_b \rangle = \delta^a_b$$

を満たすためには、e_aもmatrixで内積は積の（規格化した）トレースと考えればよい。

実際、Z_2のmatrix formに関しては$\theta^1 = \tau_1$, $\theta^2 = \tau_2$と基底をとると

$$e_1 = \tau_1,\ e_2 = \tau_2$$

のように、それ自身が双対基底と考えてよい。この空間のHodge dualは$i\tau_3$を掛ける演算に等しいことがわかる。この演算で、matrix formの0, 1, 2-formの基底

$$\left\{1, \left(\theta^1, \theta^2\right), \theta^1 \wedge \theta^2\right\}$$

すなわち

$$\left\{1, \left(\tau_1, \tau_2\right), i\tau_3\right\}$$

は

$$\{i\tau_3, (\tau_2, \tau_1), -1\}$$

すなわち

$$\{\theta^1 \wedge \theta^2, (\theta^2, -\theta^1), -1\}$$

に写されることがわかり、先に触れた２次元のHodge dualと一致する。例えばωが1-formのとき$\omega = \theta^a\omega_a = \tau_a\omega_a$

$$\omega = \tau_a\omega_a \to {}^*\omega = \tau_a\varepsilon_{ab}\omega_b$$

とする演算なので

$$\begin{aligned} & i\tau_3\omega \\ & = i\tau_3(\tau_1\omega_1 + \tau_2\omega_2) \\ & = i(\tau_3\tau_1\omega_1 + \tau_3\tau_2\omega_2) \\ & = i((i\tau_2)\omega_1 + (-i\tau_1)\omega_2) \\ & = -\tau_2\omega_1 + \tau_1\omega_2 \\ & = \tau_a\varepsilon_{ab}\omega_b \\ & = {}^*\omega \end{aligned}$$

ωが0-formのときは

$$\begin{aligned} i\tau_3\omega &= \theta^1 \wedge \theta^2\omega \\ &= \frac{1}{2}\theta^a \wedge \theta^b(\varepsilon_{ab}\omega) = {}^*\omega \end{aligned}$$

ωが2-formのときは

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\theta^a \wedge \theta^b\omega_{ab} = \theta^1 \wedge \theta^2\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\omega_{ab} \\ &= i\tau_3\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\omega_{ab} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} i\tau_3\omega &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ab}\omega_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ba}\omega_{ab} = {}^*\omega \end{aligned}$$

であり、Hodge dualとして機能していることがわかる。

$R^2 \times Z_2$空間のHodge dualは、R^2だけやZ_2だけのHodge dual操作はhermite虚実を入れ替えてしまう２次元のもので（次のセクションを参照）、固有値が$\pm i$の演算であるが、２つを同時に行うとR^4のHodge dualと同様の４次元のHodge dualであり、固有値が±1の実な演算であることがわかる。

５．３．微分形式の虚実

differential formのhermitian conjugationについて

共変微分D_μは通常“虚”つまりanti-hermiteな演算子と解釈される。これは、微分∂_μがanti-hermiteな演算子だからである。したがって共変微分を

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$$

と定義すると、A_μはanti-hermite

$$D_\mu^\dagger = -D_\mu$$

でなければいけない。

これらの性質から、1-formの基底dx^μを“実”つまりhermiteな量と定義すると、外微分作用素

$$d = dx^\mu\partial_\mu$$

や共変外微分作用素

$$D = d + A$$

もanti-hermite

$$D^\dagger = -D$$

ということになる。この場合、Field strength

$$F = dA + A \wedge A$$

は、hermiteと考えざるを得ない。このとき成分で表示すると

$$F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

であるが、最初の定義、「A_μはanti-hermite」に従うと

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

$F_{\mu\nu}$もanti-hermiteである。一見不思議だが、この表式の$\partial_\mu A_\nu$は微分演算子∂_μとA_νの積ではなく、A_νを微分したものを意味するので、矛盾ではない。$F_{\mu\nu}$がanti-hermiteであることとFがhermiteであることが整合するためには、2-formの基底$dx^\mu \wedge dx^\nu$がanti-hermiteである必要がある。これは

$$(dx^\mu \wedge dx^\nu)^\dagger = (dx^\nu)^\dagger \wedge (dx^\mu)^\dagger$$
$$= dx^\nu \wedge dx^\mu = -dx^\mu \wedge dx^\nu$$

と考えれば良い事を意味する。すなわち、Field strength 2-form Fは、anti-hermiteの係数$F_{\mu\nu}$とanti-hermiteの2-form基底$dx^\mu \wedge dx^\nu$の積のためにhermiteになっていると解釈するものである。

このようなルールはいかにも面倒なため、formの基底をはずして成分だけで計算した方が確実である。

ところが、Z_2空間の場合matrix differential formを用いているためformで計算することが本質的であり、このようなhermite性の定義が避けられないように思われる。

本稿では$R^2 \times Z_2$空間の接続$\mathcal{A}$を

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} L & i\varphi \\ i\varphi^\dagger & R \end{pmatrix}$$

と定義しているが、L, Rがanti-hermitianとして、Z_2 graded matrixのルールで計算すると$\mathcal{A}$がanti-hermitianであることがわかる。

$$\mathcal{A}^\dagger = \begin{pmatrix} L & i\varphi \\ i\varphi^\dagger & R \end{pmatrix}^\dagger$$
$$= \begin{pmatrix} L^\dagger & (-1)^{[\varphi^\dagger]}\left(i\varphi^\dagger\right)^\dagger \\ (-1)^{[\varphi]}\left(i\varphi\right)^\dagger & R^\dagger \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -L & -i\varphi \\ -i\varphi^\dagger & -R \end{pmatrix} = -\mathcal{A}$$

である。このとき、Field strength 2-form $\mathcal{F}$は

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F^L - W^L & -iD\phi \\ -i\left(D\phi\right)^\dagger & F^R - W^R \end{pmatrix}$$

であるが

$$\mathcal{F}^\dagger$$
$$= \begin{pmatrix} \left(F^L - W^L\right)^\dagger & (-1)^{[(D\phi)^\dagger]}\left(-i\left(D\phi\right)^\dagger\right)^\dagger \\ (-1)^{[D\phi]} & \left(-iD\phi\right)^\dagger \left(F^R - W^R\right)^\dagger \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \left(F^L\right)^\dagger - \left(W^L\right)^\dagger & -iD\phi \\ -i\left(D\phi\right)^\dagger & \left(F^R\right)^\dagger - \left(W^R\right)^\dagger \end{pmatrix}$$

となり、W^L, W^Rが明らかにhermiteであるためF^L, F^Rもhermiteでなければ$\mathcal{F}$のhermite虚実が定まらないことがわかる。

$$F^L - W^L = \frac{1}{2}F^L_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu - \left(\phi\phi^\dagger - 1\right)$$

のように基底を明らかに表現してみると、$F^L_{\mu\nu}$がanti-hermitianである場合$dx^\mu \wedge dx^\nu$もanti-hermitianと考えざるを得ない。

このように、matrix differential formの場合、異なるdegreeのformが混在する場合があるため、formの基底を分離して計算できないことや、matrix formは基底そのものがこのmatrixで表現されているため注意を要する。

6．まとめ

本稿では、離散型非可換空間Z_2上の微分形式としてmatrix differential formを定義し、$\mathcal{M} = M \times Z_2$空間のゲージ理論を定式した。この定式を用いることによって、２次元空間R^2上のYang-Mills-Higgs系は$R^2 \times Z_2$におけるYang-Mills理論とみなすことができることを示した。Higgs場は離散空間のゲージ場と解釈することができ、Higgs機構による対称性の破れを含めたゲージ原理がみたされる。R^2上のボルテックス方程式は$R^2 \times Z_2$という疑似的な４次元空間におけるインスタントン方程式とみなすことができることを示した。

参考文献

[1] H. Ikemori, S. Kitakado, H. Otsu and T. Sato, *Non abelian vortices as instantons on noncommutative discrete space, JHEP* **02** (2009) 004, [arXiv:0808.2396 [hep-th]].

[2] H. Otsu, T. Sato, H. Ikemori and S. Kitakado, *Vortices as instantons in Noncommutative Discrete Space: Use of Z_2 Coordinates, Mod. Phys. Lett.* **A25** (2010) 2189-2206, [arXiv:0904.1848 [hep-th]].

[3] H. Ikemori, S. Kitakado, Y. Matsui, H. Otsu and T. Sato, *Equivariance on Discrete Space and Yang-Mills-Higgs Model*, [arXiv:1504.01484 [hep-th]].

[4] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz and Y.S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations, Phys. Lett. 59B*, (1975) 85-87.

[5] G. 't Hooft, *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **79** (1974) 276-284.

[6] E. B. Bogomolny, *Stability of Classical Solutions, Sov. J. Nucl. Phys.* **24** (1976) 449.
M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *An Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon, Phys. Rev. Lett.* **35** (1975) 760.762.

[7] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfeld, and Y. I. Manin, *Construction of instantons, Phys. Lett.* **A65** (1978) 185.187.

[8] W. Nahm, *A Simple Formalism for the BPS Monopole, Phys. Lett.* **B90** (1980) 413.

[9] M.Eto, Y.Isozumi, M.Nitta, K.Ohashi, and N. Sakai, *Solitons in the Higgs phase: The moduli matrix approach, J. Phys.* **A39** (2006) R315.R392, [arXiv:hep-th/0602170].

[10] A. Connes and J. Lott, *PARTICLE MODELS AND NONCOMMUTATIVE GEOMETRY (EXPANDED VERSION), Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **18B** (1991) 29.47.

[11] R. Coquereaux, G. Esposito-Farese, and G. Vaillant, *Higgs fields as Yang-Mills fields and discrete symmetries, Nucl. Phys.* **B353** (1991) 689–706.

[12] E. Teo and C. Ting, *Monopoles, vortices and kinks in the framework of non-commutative geometry, Phys. Rev.* **D56** (1997) 2291.2302, [arXiv:hep-th/9706101].

[13] J. Madore, T. Masson and J. Mourad, *Linear connections on matrix geometries, Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 1429-1440. [hep-th/9411127].

[14] 仲滋文,「素粒子の時空と次元の変遷」, 数理科学 **26(8)**, (1988), 33-38.