［論　説］

ゴールドバッハ予想の一証明

神　頭　広　好

1　はじめに

素数の研究に関しては未解決な難問と言われるリーマン予想をはじめゴールドバッハ予想などがある。最近の論文では、コンピュータの数値結果から、弱ゴールドバッハ予想として、Helfgott および Helfgott and David, (2013) によって証明されている。さらに、Maynard (2016) および Ford, Green, Konyagin and Tao, (2016) によって、素数間の大きなギャップについて分析が行われている。

ここでは、コンピュータによる数値解析的観点からではなく、チェビシェフの定理（またはベルトラン＝チェビシェフの定理）および不等式の性質を用いてゴールドバッハ予想の証明を試みる。実際に最小の２つの素数の和が計算され、調和平均から導かれる偶数が、最大の２つの素数の和であることから、ゴールドバッハ予想が明らかにされる。

2　ゴールドバッハ予想の一証明

ゴールドバッハ予想は、「4 以上のすべての偶数は、2 つの素数の和で表すことができる」ということである。ここでは、実数軸に対してチェビシェフの定

理が成立しているとすると、素数の範囲は、

$$a < P_k < 2a \tag{1}$$

で表される。ただし、a は自然数（$2 \leq a$)、P_k は素数を示す。

また、同じ軸上で素数 P_m が存在するとすれば、(1) 式同様に、

$$b < P_m < 2b \tag{2}$$

で表される。ただし、b ($2 \leq b$) は自然数を示す。

(1) 式と (2) 式を加えると、

$$a+b < P_k + P_m < 2\,(a+b) \tag{3}$$

を得る。(3) 式の第 3 項について、幾何平均、調和平均を用いて範囲を縮小させると、調和平均のところで、等・不等号で示されるとすると、

$$a+b < P_k + P_m \leq \frac{8ab}{a+b} < 4\sqrt{ab} < 2\,(a+b) \tag{4}$$

で表される。ただし、$a \neq b$ である。

(4) 式を簡単化すると、

$$a+b < P_k + P_m \leq \frac{8ab}{a+b} \tag{5}$$

で表される。(5) 式において素数の数が少なくとも 2 つを必要とする。

さらに、$3 \leq a$、$5 \leq b$ であることから $8 \leq a+b$ である。したがって、(5) 式は、

$$8 \leq P_k + P_m \leq \frac{8ab}{a+b} \tag{6}$$

に書き換えられる。

ここで、(6) 式での調和平均の値は 2 つの素数の和が最も高い偶数であることを示唆している。この式は範囲が最小化されたもとで 2 つの素数の和が最大

化されていると考えることができる。さらに、(6) 式の第3項を変形すると、

$$8 \leq P_k + P_m \leq \frac{8ab}{a+b} = \frac{8a}{\frac{a}{b}+1} \tag{7}$$

で表される。ここで、a よりも b の方が相対的にかなり大きいとすれば、

$\frac{a}{b} \approx 0$ が成り立つ。これを (7) 式の右辺へ代入すると、

$$8 \leq P_k + P_m \leq 8a \tag{8}$$

で表される。さらに、(8) 式は、

$$8 \leq P_k + P_m \leq 2a \tag{9}$$

で書き換えられる。ただし、$4 \leq a$ である。最小値 8 の時は、$a = 4$ である。これで 4 以上の偶数は満たされる。

　また、それぞれの素数の範囲において、素数が 1 つであれば問題なく、さらに (1) 式および (2) 式の偶数 2a および 2b の手前に奇数がくるために、その奇数が素数であれば、または素数の範囲の取り方をそのようにすると、(9) 式から、

$$P_k + P_m \leq 2a \tag{10}$$

が成立する。自然数 a と b は無数に存在することから素数の範囲も無数に存在する。それゆえ P_k および P_m も任意の素数であるため、あらゆる素数でも 2 つの素数の和は偶数になる。

　さらに、$a = b$ であれば、素数の和の最小値は 4 である。この 4 を (5) 式に代入すると、

$$4 \leq P_k + P_m \leq 4a \tag{11}$$

が成り立つ。上記と同じ解釈によって（11）式から、

$$P_k + P_m \leq 2a \tag{12}$$

と書くことができる。ただし、$2 \leq a$である。

ここで、各同範囲において素数が1つの場合は、（1）式および（2）式から（12）式は成立しない。

しかし、$P_{k-1} \leq a$ および $P_{m-1} \leq a = b$ であれば、

$$P_{k-1} + P_{m-1} = 2P_{k-1} = 2P_{m-1} = 2a \tag{13}$$

であることから、

$$P_{k-1} = P_{m-1} = a \tag{14}$$

が成り立つ。これについては、チェビシェフの定理から P_{k-1} および P_{m-1} が a 以下の最大の素数であることを意味する。

一方、同範囲において素数がいくつか存在する場合は、（1）式の $a < P_k < 2a$ から、（12）式が存在するためには、$P_k \neq P_m$ でなければならない。また、a がかなり大きな値で、2a との範囲における最大の素数と最小の素数に差がある場合のそれら素数の和においてゴールドバッハ予想が成り立つ。$a < b$ かつ a と b にかなりの差がある場合と同じ解釈となる。

3　おわりに

ここでは、チェビシェフの定理から導かれる素数存在のもとで不等式の性質を用いてゴールドバッハ予想の証明を試みた。素数の性質を明らかにしたものではないが素数の性質には調和平均が関わっていること、それぞれの素数の範囲に差がある場合と、同じ範囲であっても同じ素数同士、またはかなり範囲が大きく、その範囲において素数間の大きさに差がある場合にゴールドバッハ予

想が成り立つことが分かった。

この場を借りて、浅学の私に基礎を与えて頂いた小島（2013、2017)、清水(2017）ならびに竹内（2015）の各著書、さらに私に探求心をもたらしてくれた NHK（DVD）に対して謝意を表する次第である。

参考文献

Ford, K. Green, B., Konyagin, S, and T. Tao, (2016) Large gaps between consecutive prime numbers, Annals of Mathematics, vol. 183, pp. 935-974.

Granville, A. and Martin, G. Prime Number Races, (2006) The American Mathematical Monthly, vol. 113, pp. 1-33.

Helfgott, H. A., The ternary Goldbach conjecture is true, preprint: https://arxiv. org/abs/1312.7748

Helfgott, H. A. and J. David, (2013) Platt Numerical Verification of the Ternary Goldbach Conjecture up to $8.8755 \cdot 10^{30}$, Experimental Mathematics, vol. 22, pp. 406-409.

Maynard, J. (2016) Large gaps between primes, Annals of Mathematics, vol. 183, pp. 915-933.

小島寛之（2013）『世界は 2 乗でできている』講談社ブルーバックス

小島寛之（2017）『世界は素数でできている』角川新書

清水健一（2017）『美しすぎる「数」の世界』講談社ブルーバックス

竹内　薫（2015）『素数はなぜ人を惹きつけるか』朝日新書

Newton（2020）『素数』Newton Press、2 月 25 日発行

資料

NHK（DVD）『リーマン予想　天才たちの 150 年の闘い』(2009 年 11 月 21 日 NHK BS-hi にて放送)