

数独の数学

Introduction to Mathematics of Sudoku

梅垣 敦紀

UMEGAKI Atsuki

愛知大学国際コミュニケーション学部

Faculty of International Communication, Aichi University

E-mail: umegaki@aichi-u.ac.jp

梅垣 由美子

UMEGAKI Yumiko

奈良女子大学理学部

Faculty of Science, Nara Women's University

E-mail: ichihara@cc.nara-wu.ac.jp

Abstract

In 2007, Herzberg and Murty considered $n^2 \times n^2$ Sudoku for any n mathematically (see [5]). In 2018, Berend improved a part of their results (see [1]). In this paper, we introduce mathematics of Sudoku on the basis of [5] and [1]. Moreover, we discuss a correspondence between Sudoku with diagonal conditions and triangular Sudoku with some conditions.

1 $2^2 \times 2^2$ 数独に必要な数字の個数

$3^2 \times 3^2$ の数独は通常 1 から 9 までの数字を用いる。一般に、 $n^2 \times n^2$ で 1 から n^2 までの n^2 個の数字を用いた数独は完成させられるだろうか？まず、使う数字の個数を指定せずに一般的な数独のルールを次のように決める。

【数独ルール】 $n \times n$ の碁盤の目を n^2 個並べて、 $n^2 \times n^2$ の碁盤の目を作る. ここで、 $n^2 \times n^2$ の碁盤の目を $n^2 \times n^2$ 格子 (【英】 **grid**) といい、最初に与えた $n \times n$ 碁盤の目をその**部分格子** (【英】 **sub-grid**) という. いくつかの数字を用いて、

- $n^2 \times n^2$ 格子の任意の行について、すべて異なる数字が入る
- $n^2 \times n^2$ 格子の任意の列について、すべて異なる数字が入る
- 任意の部分格子の各マスにすべて異なる数字が入る

という条件を満たすように $n^2 \times n^2$ 格子を埋める.

Proposition 1.1. 2×2 部分格子を持つ 4×4 格子について、数独ルールですべてのマスを埋めるために必要な数字の最小の個数は 4 である.

Proof. 2×2 部分格子に同じ数字が入ってはいけないので、少なくとも 4 つの数字が必要である. 4×4 格子の各マスに以下の通りに座標を付けて (i, j) 成分とする.

$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 2)$	$(0, 3)$
$(1, 0)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$
$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(2, 3)$
$(3, 0)$	$(3, 1)$	$(3, 2)$	$(3, 3)$

各 (i, j) 成分 $(i, j = 0, 1, 2, 3)$ について

$$i = 2t_i + d_i, \quad j = 2t_j + d_j \quad (t_i, t_j, d_i, d_j = 0, 1)$$

とおいて、 (i, j) 成分に「 $c(i, j) = 2d_i + t_i + 2t_j + d_j$ を 4 で割った剰余」を入れると

0	1	2	3
2	3	0	1
1	2	3	0
3	0	1	2

となる. よって、数独ルールに則って 4 つの数字を用いて格子のすべてを埋めることができた. ゆえに、

$$4 \leq (4 \times 4 \text{ 格子を埋めることができる数字の最小の個数}) \leq 4$$

となるので主張が示せた. □

第2節で示すが、これは $n = 2$ だけではなく、一般の n について証明が可能である。したがって、次のパズルを考えることが可能となる。

Definition 1.2 ($n^2 \times n^2$ 数独パズル). $n \times n$ 部分格子をもつ $n^2 \times n^2$ 格子のいくつかのマスに、1 から n^2 までの数字が

- 同じ行や同じ列に数字の重複がない
- 同じ $n \times n$ 部分格子に数字の重複がない

を満たすように与えられているとき、これを $n^2 \times n^2$ 数独パズル (【英】 $n^2 \times n^2$ Sudoku puzzle) と呼ぶ。また、与えられた数独パズルのすべての空白のマスに、

- $n^2 \times n^2$ 格子の任意の行について、1 から n^2 までの数字がすべてが入る
- $n^2 \times n^2$ 格子の任意の列について、1 から n^2 までの数字がすべて入る
- 任意の $n \times n$ 部分格子について、1 から n^2 までの数字がすべて入る

という3条件を満たすように数字を入れたものを、与えられた数独パズルの解 (【英】 solution) とよぶ。さらに、この3条件が満たされた $n^2 \times n^2$ 格子のことを n 階数独方陣 (【英】 Sudoku square of rank n) という。 n 階数独方陣の個数を S_n とおく。

$3^2 \times 3^2$ 数独パズルは

2	5			3		9		1
	1				4			
4		7				2		8
		5	2					
				9	8	1		
	4				3			
			3	6			7	2
	7							3
9		3				6		4

のような通常の数独を意味する。

Remark 1.2.1. 1つの数独方陣が解となるような数独パズルを複数個構成できるので、数独パズルの個数は数独方陣の個数よりも多い。

Remark 1.2.2. 第1節から第5節までにある術語の英語は [5] に基づく。

1.1 2階数独方陣の個数

2階数独方陣が何通り存在するか考えてみる.

【Step 1】 4×4 格子の左上の 2×2 部分格子には 4 種類の数字が入る. 例えば, 1 から 4 までの数字を用いて

1	2		
3	4		

とおく. この 2×2 部分格子の数字の入れ方は $4!$ 通りある.

【Step 2】 Step 1 で決めた数独パズルに対し,

1	2	○	●
3	4		
△			
▲			

○に入る数字は 3 か 4 のいずれかの 2 通りであって, ○が決まれば ● は 1 つに確定する. 同様に, △に入る数字は 2 か 4 の 2 通りあって, △が決まれば ▲ は 1 つに確定する. したがって, 以下の 4 通りが考えられるが,

1	2	3	4
3	4		
2		★	
4			

1	2	3	4
3	4		
4			
2		★	

1	2	4	3
3	4		
2			★
4			

1	2	4	3
3	4		
4			
2			★

そのすべてについて ★ の位置に入る数字は 4 に確定する.

【Step 3】 Step 2 の数独パズルに対して下の図の ♡ の埋め方は 1 か 2 の 2 通りある. 同様に, ◇ の埋め方は 1 か 3 の 2 通りである. ♡ と ◇ のどちらを先に決めてもすべての数独方陣が見つげられる.

1	2	3	4
3	4	♡	
2	◇	4	
4			

1	2	3	4
3	4	♡	
4			
2	◇	4	

1	2	4	3
3	4		♡
2	◇		4
4			

1	2	4	3
3	4		♡
4			
2	◇		4

♡ を先に決めることにする。このとき、♡ を決めれば、♡ がある行と列のマスはすべて決定できる。よって、

1	2	3	4
3	4	♡	♠
2		4	
4		♠	

1	2	3	4
3	4	♡	♠
4		♠	
2		4	

1	2	4	3
3	4	♠	♡
2			4
4			♠

1	2	4	3
3	4	♠	♡
4			♠
2			4

のように、♠ のマスに ♡ とは異なる残りの数字を入れれば良い。♡ に入り得るのは1か2のいずれかである。♡ = 2 ならば、残りの4つのマスの数字はすべて一意的に決まる。♡ = 1 ならば、残り4つのマスのうちの1つに2通りの数字の入れ方があり、それを決めれば残り3のマスに入る数字も決定できる。したがって、Step 1 で定めた通りに左上の部分格子を固定したとき、12通りの数独パズルが存在するから、対称群 S_4 の作用による数字の置換を考えれば、2階数独方陣をすべて求めることができる。

Proposition 1.3. 2階数独方陣の個数について、 $S_2 = 4! \times 12 = 288$ が成り立つ。

Step 3 における12通りの数独方陣をすべて書き出す。♡ = 2 の場合は以下の4通りである。

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

1	2	3	4
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	4	3

1	2	4	3
3	4	1	2
2	1	3	4
4	3	2	1

1	2	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	3	4

♡ = 1 の場合は、

1	2	3	4
3	4	1	2
2		4	
4		2	

1	2	3	4
3	4	1	2
4		2	
2		4	

1	2	4	3
3	4	2	1
2			4
4			2

1	2	4	3
3	4	2	1
4			2
2			4

の空欄の4マスのうち1つを埋めれば残りのマスはすべて決まる。したがって、♡ = 1 のときの、2階数独方陣は本質的に次の8つであることがわかる。

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

1	2	4	3
3	4	2	1
4	1	3	2
2	3	1	4

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	4	3
3	4	2	1
2	3	1	4
4	1	3	2

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

Problem 1. $2^2 \times 2^2$ 数独パズルにおいて、最初にいくつかのマスに適切な数字を入れておけばその解は唯一つに定まる。そのために必要な最初に与える文字の種類数の最小の個数はいくつか？例えば、1, 2, 3 だけを用いた

1			3
			2
	3		

という数独パズルは解が唯一つに定まる。では、1 と 2 だけを用いて作った $2^2 \times 2^2$ 数独パズルで解が唯一つに定まるものは存在するだろうか？

Problem 2. $2^2 \times 2^2$ 数独パズルにおいて、最初にいくつかのマスに適切な数字を入れておけばその解は唯一つに定まる。その最小のマス数の個数はいくつか？例えば、4つのマスを埋めた

1			
			2
		4	
	3		

という数独パズルは解が1つに定まる。では、3つのマスだけを埋めることで解が1つに定まるような $2^2 \times 2^2$ 数独パズルは存在するだろうか？

1.2 $2^2 \times 2^2$ 数独パズルとグラフの彩色

数字が重ならないようにパズルのマスに入れていくことと、4つの色が重ならないようにパズルのマスを塗っていくことは同じだから、数独を4種類の色を用いてマスを塗り分けるパズルとして考えることもできる。このような「彩色問題」はグラフを用いて考察することが多い。

Definition 1.4 (2 階数独グラフ X_2). $2^2 \times 2^2$ 数独方陣を考える. 2×2 部分格子を持つ 4×4 格子の各マスを頂点として,

- (1) 同じ 2×2 部分格子に入っている自分以外の頂点 (1つの頂点に対して辺が3つ描かれる)
- (2) 4×4 格子の同じ行に並ぶ自分以外の頂点 ((1)の辺以外に1つの頂点に対して辺がさらに2つ増える)
- (3) 4×4 格子の同じ列に並ぶ自分以外の頂点 ((1), (2)の辺以外に1つの頂点に対して辺がさらに2つ増える)

というルールで頂点と頂点を辺で結ぶ. このグラフを **2 階数独グラフ** ([英] **Sudoku graph of rank 2**) といい, X_2 で表す. このグラフの各頂点は7つの辺をもつ.

ここで, 一般のグラフ G に対して, 以下のような定義を考える.

Definition 1.5 (グラフ G の彩色数). λ 種類の色を用いてグラフ G の各辺の両端が異なる色となるように彩色する. G の彩色の種類数を $p_G(\lambda)$ とする. G の彩色に必要な色数の最小数を彩色数 ([英] **chromatic number**) といい, $\chi(G)$ と表す.

前述の結果 Proposition 1.3 と Proposition 1.1 は次のように言い換えられる.

Proposition 1.6. $p_{X_2}(4) = 288$ であり, $p_{X_2}(1) = p_{X_2}(2) = p_{X_2}(3) = 0$ が成り立つ. また, $\chi(X_2) = 2^2$ である.

さらに, グラフの彩色数について次がわかる.

Proposition 1.7 ([5, Theorem 2]). グラフ G と $\chi(G) - 2$ 色で彩色された部分グラフ C について C を含むようにグラフ G が彩色される時, 少なくとも2通りの方法がある.

Proof. 一通りの彩色方法について, 追加した2色の交換が考えられる. □

Corollary 1.8. グラフ G と彩色された部分グラフ C について, C を含むようにグラフ G が彩色される方法が一通りならば, C は少なくとも $\chi(G) - 1$ 色の色で彩色されていないといけない.

Corollary 1.9. $2^2 \times 2^2$ 数独パズルの解が唯一つに決まるためには, 対応する数独グラフ X_2 が, 少なくとも $\chi(X_2) - 1 = 2^2 - 1 = 3$ 色で彩色された部分グラフを持たなければならない.

この Corollary 1.9 から, Problem 1 が否定的に結論付けられる. $2^2 \times 2^2$ 数独パズルの解が唯一つに定まるためには, 最初に少なくとも 3 つの数字を用いていくつかのマスが埋まっていなくてはならない. 1 と 2 だけを用いて与えられた $2^2 \times 2^2$ 数独パズルは解が唯一つには定まらない.

少なくとも 3 つの数字を使う $2^2 \times 2^2$ 数独パズルで, 4 つのマスだけを埋めて解が唯一つに定まる例が存在することは既に紹介した. 次に, 3 マスだけで数独パズルの解が唯一つに定まるかが問題となるが, [5] で言及されているように次の命題によって, Problem 2 の答えは否定的である.

Proposition 1.10. $2^2 \times 2^2$ 数独パズルについて, 少なくとも 4 つのマスに 3 種類以上の数字が入っていなければ, 解は一意的でない.

Proof. \mathfrak{S}_4 の作用を除いて, 2 階数独方陣は Proposition 1.3 において青で示した 12 個のいずれかに一致するのであった. それぞれの数独方陣に対して, 任意の 3 つの相異なる数字が入るマスを選ぶとき, 必ず同じマスに同じ数字が入る他の数独方陣を作ることができる. したがって, 命題の主張が成立する. \square

2 $n^2 \times n^2$ 数独パズルに必要な数字の個数

次が成立するので, 一般の n についても, 数独パズルを考えることができる.

Theorem 2.1 ([5, Theorem 3]). $n \times n$ 部分格子を持つ $n^2 \times n^2$ 格子について, 数独ルールですべてのマス埋めるために必要な数字の最小の個数は n^2 である.

Proof. $n \times n$ 部分格子に同じ数字が入ってはいけないので, 少なくとも n^2 個の数字が必要である. Proposition 1.1 の証明のように各マスに座標を付けて, (i, j) 成分とする.

$$i = nt_i + d_i, \quad j = nt_j + d_j \quad (0 \leq t_i, t_j, d_i, d_j \leq n-1)$$

とおく. (i, j) 成分 ($0 \leq i, j \leq n^2 - 1$) に「 $c(i, j) := nd_i + t_i + nt_j + d_j$ を n^2 で割った剰余」を入れる.

i 行目の j 列と j' 列が同じ数字になると仮定すると, (i, j) 成分と (i, j') 成分に同じ数字が入るので

$$nd_i + t_i + nt_j + d_j \equiv nd_i + t_i + nt_{j'} + d_{j'} \pmod{n^2}$$

であり,

$$nt_j + d_j \equiv nt_{j'} + d_{j'} \pmod{n^2}$$

がわかる. ここで, $t_j, t_{j'}, d_j, d_{j'} = 0, 1, 2, \dots, n-1$ より,

$$nt_j + d_j, nt_{j'} + d_{j'} \leq n(n-1) + n-1 = n^2 - 1$$

であって,

$$nt_j + d_j = nt_{j'} + d_{j'}$$

が得られる. 整数の商と剰余は一意的に決まるので, $t_j = t_{j'}$ かつ $d_j = d_{j'}$ が成り立つ. したがって, $j = j'$ である. i 行に同じ数字が重複して現れないことを示せた. 同様にすれば, j 列に同じ数字が重複して現れないことがわかる.

同じ $n \times n$ 部分格子の (i, j) 成分と (i', j') 成分を考える. このとき, $t_i = t_{i'}$ かつ $t_j = t_{j'}$ が成り立つことに注意する. この (i, j) 成分と (i', j') 成分に同じ数字が入るとすると,

$$nd_i + t_i + nt_j + d_j \equiv nd_{i'} + t_{i'} + nt_{j'} + d_{j'} \pmod{n^2}$$

だから,

$$nd_i + d_j \equiv nd_{i'} + d_{j'} \pmod{n^2}$$

となる. $nd_i + d_j, nd_{i'} + d_{j'} \leq n(n-1) + n-1 = n^2 - 1$ だから,

$$nd_i + d_j = nd_{i'} + d_{j'}$$

が得られる. 前述と同様に, 整数の商と剰余は一意的に決まるので, $d_i = d_{i'}$, $d_j = d_{j'}$ がいえる. つまり, $i = i'$ かつ $j = j'$ が成り立つ.

以上によって, n^2 個の数字を用いた n 階数独方陣が得られた. つまり,

$$n^2 \leq (n \text{ 階数独方陣が成立するための数字の種類}) \leq n^2$$

が成り立つ. したがって, 定理がいえた. □

3 数独方陣とラテン方陣

この節では, 数独方陣とラテン方陣の関係とそれぞれの個数を考える. まず, 重要な役割を果たす $\text{per } M$ を定義する.

Definition 3.1 (パーマメント). (i, j) 成分を $a_{i,j}$ とする $n \times n$ 行列 $M = (a_{i,j})$ に対し, M のパーマメント (**【英】 permanent**) を

$$\text{per } M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

で定義する.

成分が 0 か 1 のいずれかからなる $n \times n$ 行列 M について

$$\text{per } M \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i} \quad (3.1)$$

となることが知られている ([8], Brégman's Theorem 参照). ここで, r_i は M の i 行目に入る数の和を意味する. また $n \times n$ の二重確率行列 (【英】 **doubly stochastic matrix**) M については

$$\text{per } M \geq \frac{n!}{n^n} \quad (3.2)$$

が成立することが知られている. ただし, 二重確率行列とは各行の成分の和と各列の成分の和が 1 となるものをいう.

次に, m 次のラテン方陣を定義する.

Definition 3.2 (ラテン方陣). $m \times m$ の格子の任意の行と任意の列に 1 から m までの数字がすべて現れるようなものを m 次ラテン方陣 (【英】 **Latin square of order m**) といい. m 次ラテン方陣の個数を L_m とおく.

このとき, n^2 次ラテン方陣は n 階数独方陣と比較して部分格子の条件がないから,

$$\{n^2 \text{ 次ラテン方陣全体} \} \supset \{n \text{ 階数独方陣全体} \}$$

である. よって, n^2 次ラテン方陣の個数 L_{n^2} と n 階数独方陣の個数 S_n は

$$L_{n^2} \geq S_n$$

を満たす.

m 次ラテン方陣を作るための最初の行の選び方は $m!$ 通りある. ここで, $k = 1, 2, \dots, m$ について, $k-1$ 行目まで数字を埋めたときに k 行目の数字の入れ方が何通りあるかを考える. 1 から $k-1$ 行目の i 列で使っていない数字の集合を A_i とする. A_i には $m - (k-1)$ 個の数字が入る. ラテン方陣の k 行目を完成させるには A_1, A_2, \dots, A_m から相異なる数字を取り出せばよい. そこで, $m \times m$ 行列 M_k を

$$(M_k \text{ の } (s, t) \text{ 成分}) = \begin{cases} 1 & (s \in A_t \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

となるように定める. すると, $\text{per } M_k$ は A_1, A_2, \dots, A_m から相異なる数字を取り出す方法の数になる. $M'_k = (m - (k-1))^{-1} M_k$ は二重確率行列だから, $\text{per } M_k$ は (3.2) によって

$$\text{per } M_k = (m - (k-1))^m \text{per } M'_k \geq \frac{(m - (k-1))^m m!}{m^m}$$

を満たすことがわかる。よって、 m 次ラテン方陣の個数 L_m について、

$$\begin{aligned} L_m &= \prod_{k=1}^m \text{per } M_k \\ &\geq \prod_{k=1}^m \frac{(m - (k - 1))^m m!}{m^m} \\ &= (m!) \frac{(m - 1)^m m!}{m^m} \frac{(m - 2)^m m!}{m^m} \cdots \frac{(1)^m m!}{m^m} \\ &= (m!) \frac{((m - 1)!)^m}{(m^m)^{m-1}} (m!)^{m-1} = \frac{(m!)^m}{(m^m)^n} (m!)^m = \frac{(m!)^{2m}}{m^{m^2}} \end{aligned}$$

である。また、(3.1) から、

$$\text{per } M_k \leq \prod_{i=1}^m ((m - (k - 1))!)^{1/(m - (k - 1))} = ((m - (k - 1))!)^{m/(m - (k - 1))}$$

がわかる。ゆえに、

$$L_m \leq \prod_{k=1}^m \text{per } M_k \leq \prod_{k=1}^m ((m - (k - 1))!)^{m/(m - (k - 1))} = \prod_{k=1}^m (k!)^{m/k}$$

が得られる。したがって、次がわかる ([1], [5, Lemma 4], [8, ch.17] 参照)。

Theorem 3.3. m 次ラテン方陣の個数 L_m について、

$$\frac{(m!)^{2m}}{m^{m^2}} \leq L_m \leq \prod_{k=1}^m (k!)^{m/k}$$

が成り立つ。

[5], [1] にも言及されているが、この Theorem 3.3 によって直ちに次を導くことができる。

Corollary 3.4. n^2 次ラテン方陣の個数 L_{n^2} について、

$$\left(\frac{n^2}{e^2}\right)^{n^4} e^{2n^2 \log n} e^{n^2 \log 2\pi + O(1)} \leq L_{n^2} \leq \left(\frac{n^2}{e^2}\right)^{n^4} e^{O(n^2(\log n)^2)}$$

が成り立つ。すなわち、十分大きい n に対して

$$\left(\frac{n^2}{e^2}\right)^{n^4} e^{2n^2 \log n} \leq L_{n^2} \leq \left(\frac{n^2}{e^2}\right)^{n^4} e^{Cn^2(\log n)^2}.$$

を満たす定数 C が存在する。

Proof. Theorem 3.3 より、 L_{n^2} は少なくとも $\frac{((n^2)!)^{2n^2}}{n^{2n^4}}$ 個存在することがわかる。Stirling の公式

$$\log(m!) = m \log m - m + \frac{1}{2} \log(2\pi m) + O(m^{-1}) \quad (3.3)$$

から,

$$\begin{aligned}
 \log((n^2)!)^{2n^2} &= 2n^2 \log((n^2)!) \\
 &= 2n^2 \left(n^2 \log n^2 - n^2 + \frac{1}{2} \log(2\pi n^2) + O(1/n^2) \right) \\
 &= 2n^2 \left(2n^2 \log n - n^2 + \log n + \frac{1}{2} \log(2\pi) + O(1/n^2) \right) \\
 &= 4n^4 \log n - 2n^4 + 2n^2 \log n + n^2 \log(2\pi) + O(1)
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに,

$$((n^2)!)^{2n^2} = n^{4n^4} e^{-2n^4 + 2n^2 \log n} e^{n^2 \log 2\pi + O(1)} = \left(\frac{n^4}{e^2} \right)^{n^4} e^{2n^2 \log n} e^{n^2 \log 2\pi + O(1)}$$

となる。よって、主張の下限が得られた。同様に、Theorem 3.3 から L_{n^2} は多くても

$\prod_{k=1}^{n^2} (k!)^{n^2/k}$ だから,

$$\begin{aligned}
 \log \left(\prod_{k=1}^{n^2} (k!)^{n^2/k} \right) &= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n^2}{k} \log(k!) \\
 &= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{n^2}{k} \left(k \log k - k - \frac{1}{2} \log(2\pi k) + O(1/k) \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n^2} \left(n^2 \log k - n^2 - \frac{n^2}{2k} \log(2\pi k) + O(n^2/k^2) \right) \\
 &= n^2 \log((n^2)!) - n^4 + O(n^2(\log n)^2) \\
 &= n^2(n^2 \log n^2 - n^2 - \frac{1}{2} \log(2\pi n^2) + O(1/n^2)) - n^4 + O(n^2(\log n)^2) \\
 &= n^4 \log n^2 - 2n^4 + O(n^2(\log n)^2)
 \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\prod_{k=1}^{n^2} (k!)^{n^2/k} = \left(\frac{n^2}{e^2} \right)^{n^4} e^{O(n^2(\log n)^2)}$$

が成り立つ。ゆえに、主張がすべていえた。 □

Remark 3.4.1. Corollary 3.4 の n^2 を m と読み換えれば、[1] に言及されているように、十分大きい m について

$$\left(\frac{m}{e^2} \right)^{m^2} e^{m \log m} \leq L_m \leq \left(\frac{m}{e^2} \right)^{m^2} e^{Cm(\log m)^2}$$

を満たす定数 C が存在することがわかる。

Remark 3.4.2. n 階数独方陣の個数 S_n は

$$S_n \leq \left(\frac{n^2}{e^2}\right)^{n^4} e^{O(n^2(\log n)^2)}$$

を満たす.

4 n 階数独方陣の個数

[4] によって, 次の結果が知られている.

Theorem 4.1. 3 階数独方陣の個数について

$$S_3 = 6,670,903,752,021,072,936,960$$

が成り立つ.

Remark 4.1.1. 1つの3階数独方陣に対して, 1から9までの数字を置き換えることで新しい数独方陣が得られるが, このような数字の入れ換えは $\#\mathfrak{S}_9 = 9! = 362880$ 通りある. また, このような変換だけでなく,

- 3つの帯の入れ換え (ここで, 帯とは 3×3 の部分格子を横に3つ並べたものを指す)
- 3つの縦の帯の入れ換え (ここで, 縦の帯とは 3×3 の部分格子を縦に3つ並べたものを指す)
- 帯の中の3つの行の交換
- 縦の帯の中の3つの列の交換

などの変換で移り合う数独方陣はカウントせずに, 移り合わない数独方陣の個数を考えると

$$5,472,730,538$$

通りあることが [7] で示されている.

一般の n について, [5] の Theorem 6 で n 階数独方陣の個数 S_n の上限が計算された (これは変換で移り合うものもすべて含んでいる).

Theorem 4.2 ([5, Theorem 6]). n 階数独方陣の個数 S_n について

$$S_n \leq n^{2n^4} e^{-2.5n^4 + O(n^3 \log n)}$$

が成り立つ.

Remark 4.2.1. これは前節の Remark 3.4.2 よりも良い評価となっている.

次に示す Theorem 4.3 ([1] 参照) は Theorem 4.2 の結果の改良になっているので, Theorem 4.2 の証明は省略する.

Theorem 4.3 ([1, Theorem 2.1 and Proposition 2.2]). n 階数独方陣の個数 S_n について,

$$S_n \leq n^{2n^4} e^{-3n^4 + O(n^3 \log n)}$$

が成り立つ. また, n が偶数であれば,

$$S_n \geq \lambda^{n^4}$$

を満たす計算可能な定数 $\lambda > 1$ が存在する.

Remark 4.3.1. Theorem 4.3 は Theorem 4.2 の証明にある S_n の数え上げをより精密に行うことで得られる.

Proof. n 階数独方陣の $hn + (k + 1)$ 行目 ($0 \leq h, k \leq n - 1$) を考える. 横に並ぶ $n \times n$ 部分格子の列を帯 (【英】 band) とよぶことにする. ここで考える $hn + (k + 1)$ 行目とは, $h + 1$ 番目の帯にある $n \times n$ 部分格子の中の $k + 1$ 行目を指す.

$hn + k$ 行目まで数独ルールに反しない数字が埋まっているとき, $hn + (k + 1)$ 行目を数独ルールに反することなく数字を入れる方法の数を考える. $hn + (k + 1)$ 行目の各マスに対してラベルを $1, 2, \dots, n^2$ を付けて $n^2 \times n^2$ 行列 $M_{hn+(k+1)}$ を以下のように定める. まず, 次の表を考える.

	ラベル	1	2	3	4	...
入れる数字の候補						
1						
2						
3						
4						
⋮						

この表において, 数字 s とラベル ℓ が表す欄を $M_{hn+(k+1)}$ の (s, ℓ) 成分とする. 数字 s をラベル ℓ に入れるとき, それが数独ルールに反しない場合は (s, ℓ) 成分に 1 を, 数独ルールに反する場合は (s, ℓ) 成分に 0 を入れる.

$M_{hn+(k+1)}$ 行列の s 行目の成分の和は, 数独方陣の $hn + (k + 1)$ 行目に数字 s が入りうるマスの数を意味している. それに気を付けると, $M_{hn+(k+1)}$ 行列の s 行目の成分の和は次のようにしてわかる.

- (a) 数独方阵の $h+1$ 番目の帯において、 k 行目までは数字が埋められているので、 s はこの帯の中の k 個の列に入っている。同じ部分格子に s は 1 つしか入りえないので、この帯にある n 個の部分格子のうち k 個の部分格子には s が入らないことがわかる。よって、この帯において s が入り得ない列は kn 個存在する。
- (b) 同じ帯にある残りの $n-k$ 個の部分格子のうち s が入りえない列の数を数える。 h 番目までの帯の部分格子に s が入っているため各部分格子の h 個の列には s は入り得ない。よって、 s が入り得ない列は $(n-k)h$ 個存在する。

(a), (b) より、 $M_{hn+(k+1)}$ の s 行目の成分の和は

$$n^2 - (kn + (n-k)h) = n^2 - (k+h)n + kh = (n-k)(n-h)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} & \#(\text{数独方阵の } hn + (k+1) \text{ 行目の選び方}) \\ &= \text{per } M_{hn+(k+1)} \\ &\leq \prod_{\ell=1}^{n^2} (((n-k)(n-h))!)^{1/((n-k)(n-h))} = (((n-k)(n-h))!)^{n^2/((n-k)(n-h))} \end{aligned}$$

となる。したがって、(3.3) より

$$S_n \leq \prod_{h=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (((n-k)(n-h))!)^{n^2/((n-k)(n-h))} = \prod_{h=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} ((kh)!)^{n^2/kh}$$

だから、

$$\begin{aligned} \log S_n &\leq n^2 \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{kh} \log((kh)!) \\ &= n^2 \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{kh} (kh \log(kh) - kh + O(\log(kh))) \\ &= n^2 \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n (\log k + \log h - 1 + O((\log n)/(kh))) \\ &= n^2 (2n \log(n!) - n^2 + O((\log n)^3)) \\ &= n^2 (2n(n \log n - n + O(\log n)) - n^2 + O((\log n)^3)) \\ &= n^2 (2n^2 \log n - 2n^2 + O(n \log n) - n^2 + O((\log n)^3)) \\ &= n^2 (2n^2 \log n - 3n^2 + O(n \log n)) \\ &= 2n^4 \log n - 3n^4 + O(n^3 \log n) \end{aligned}$$

がわかる.

$n = 2m$ のとき, $n^2 \times n^2$ 数独方陣には $n \times n$ 部分格子が横に n 個, 縦に n 個並ぶ. $1, 2, 3, 4$ の数字が入った $2^2 \times 2^2$ 数独方陣の各 2×2 部分格子を $n^2 \times n^2$ の部分格子に割り振る. この割り振り方は $(n^2/4)^2 = n^4/16$ 通り考えられる. ゆえに, Proposition 1.3 より

$$S_n \geq (S_2)^{n^4/16} = (288^{1/16})^{n^4}$$

がわかる. □

この定理に関して, 次の予想がある.

Conjecture 4.4 ([5] 参照). n 階数独方陣の個数 S_n について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S_n}{2n^4 \log n} = 1$$

が成り立つ.

4.1 割合

3 階数独方陣は [4] により

$$6,670,903,752,021,072,936,960 \approx 6.671 \times 10^{21}$$

個存在することは Theorem 4.1 で述べた. 9 次ラテン方陣の個数 L_9 は, [3] で

$$5,524,751,496,156,892,842,531,225,600 \approx 5.525 \times 10^{27}$$

となることが述べられている. p_n を n^2 次ラテン方陣のうち n 階数独方陣の割合とすると, おおよそ

$$p_3 = \frac{S_3}{L_9} = \frac{6.671}{5.525 \times 10^6} = 0.00011\%$$

くらいで, その割合はとても小さいことがわかる. このことについて, 実際に次が得られる.

Proposition 4.5 ([5, Corollary 7]). p_n を n^2 次ラテン方陣のうち n 階数独方陣の割合とすると,

$$p_n \leq e^{-0.5n^4 + O(n^3 \log n)}$$

が成り立つ. 特に, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ がわかる.

Proof. Theorem 4.2 と Corollary 3.4 から,

$$p_n \leq \frac{n^{2n^4} e^{-2.5n^4 + O(n^3 \log n)}}{n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}} \leq e^{2n^4 - 2.5n^4 + O(n^3 \log n)} = e^{-0.5n^4 + O(n^3 \log n)}$$

となる. □

Remark 4.5.1. Theorem 4.3 を用いれば

$$p_n \leq \frac{n^{2n^4} e^{-3n^4 + O(n^3 \log n)}}{n^{2n^4} e^{-2n^4 + O(n^2 \log n)}} \leq e^{-n^4 + O(n^3 \log n)}$$

となる.

5 n 階数独グラフと n 階数独方陣

地図の塗分けの四色問題は計算機を用いて証明された. 数独パズルについても計算機による考察が多くなされている.

Theorem 4.1 の数独方陣の個数 S_3 は計算機を用いて計算され, さらに, 最初に少なくとも 17 マスの数字を与えなくては数独パズルの解が一通りに決まらないことが計算機を用いて 2012 年に証明された (出版は 2014 年 [6]).

このように計算機を用いて解決する問題もあるが, 一般の数独パズルを考える場合は数学の一般論で考察することが期待される.

Definition 5.1 (n 階数独グラフ X_n). $n^2 \times n^2$ 数独パズルを考える. $n \times n$ 部分格子を持つ $n^2 \times n^2$ 格子の各マスをもとに

- (1) 同じ部分格子に入っている自分以外の頂点 (1つの頂点に対して辺が $n^2 - 1$ 本描かれる)
- (2) 格子の同じ行に並ぶ自分以外の頂点 ((1) で描いた辺以外に 1つの頂点に対して辺がさらに $n^2 - n$ 本増える)
- (3) 格子の同じ列に並ぶ自分以外の頂点 ((1), (2) で描いた辺以外に 1つの頂点に対して辺がさらに $n^2 - n$ 本増える)

というルールで頂点と頂点を辺で結ぶ. このグラフの各頂点は $(n^2 - 1) + (n^2 - n) + (n^2 - n) = 3n^2 - 2n - 1$ 本の辺をもつ. また, 格子の (i, j) 成分 ($0 \leq i, j \leq n - 1$) に該当する頂点を (i, j) とする. このように作ったグラフ X_n を n 階数独グラフ (【英】 **Sudoku graph of rank n**) という.

n 階数独グラフ X_n の頂点 (i, j) ($0 \leq i, j \leq n-1$) に対して、頂点 (i', j') が同じ $n \times n$ 部分格子に入っているかどうかは次のようにして判断できる。 i 行目を同じ部分格子に入っているところで区切ると、

$$(i, 0), (i, 2), \dots, (i, n-1) \parallel (i, n), \dots, (i, 2n-1) \parallel (i, 2n), \dots,$$

のようになっているから、 j を n で割った商を t_j 、 剰余を d_j とかく (すなわち、 $j = t_j n + d_j$ ($0 \leq d_j \leq n-1$) とかく) と、 $t_j = t_{j'}$ であれば同じ部分格子に入ることがわかる。 ゆえに、

2つの頂点 (i, j) と (i', j') が辺で結ばれる

\iff

$$i = i', j = j', t_j = t_{j'}, t_i = t_{i'} \text{ のいずれか 1 つが成り立つ}$$

となることがわかる。 X_n を数独グラフとして、その部分グラフで d_0 色で彩色されたものを C とする。 X_n の彩色を λ ($\geq d_0$) 色で完成させる方法の数を $p_{X_n, C}(\lambda)$ と書く。 一般に数独パズルとして提示される問題は $p_{X_n, C}(n^2) = 1$ を満たす C を与えなくてはならない。

Theorem 5.2 ([5, Theorem 1]) . G をグラフとして、その部分グラフで d_0 個の色による彩色をもつものを C とする。 G の彩色を λ ($\geq d_0$) 色で完成させる方法の数を $p_{G, C}(\lambda)$ と書くと、 $p_{G, C}(\lambda)$ は整数係数かつ筆頭係数が 1 となるような λ の多項式になる、すなわち、 $p_{G, C}(\lambda) \in \mathbf{Z}[\lambda]$ となる。

この証明は第 5.2 節で行うことにする。

例えば、 λ ($\geq n^2$) 色で完成させる n 階数独グラフ X_n のうち、 d_0 ($\leq n^2 - 1$) 色で彩色された部分グラフ C をもつものは、 $p_{X_n, C}(\lambda)$ 通りある。 Theorem 2.1 によって、多項式 $p_{X_n, C}(\lambda)$ は $\lambda = d_0, d_0 + 1, \dots, n^2 - 1$ を根にもつ。 すなわち、整数係数の多項式 $g'_{X_n, C} \lambda \in \mathbf{Z}[\lambda]$ を用いて

$$p_{X_n, C}(\lambda) = (\lambda - d_0)(\lambda - (d_0 + 1)) \cdots (\lambda - (n^2 - 1)) g_{X_n, C}(\lambda)$$

と表すことができる。 ここで、

$$p_{X_n, C}(n^2) = (n^2 - d_0)! g_{X_n, C}(n^2)$$

だから、 $d_0 \leq n^2 - 2$ であれば数独パズルの解は唯 1 つには決まらず、 $(n^2 - d_0)!$ の倍数通りの解を考えることができる。

5.1 Möbius 関数

Theorem 5.2 を示すために Möbius 関数を導入する. [2] を参考にして概略を紹介する. 一般に有限個の頂点を持つグラフ (有限グラフ) G に対して, 辺 e を両端の頂点を同一視して (辺 e の両端の頂点 u, v とそれらを頂点とする辺をすべて消去して, 新しい頂点を 1 つ加え, その頂点と u または v と接続していた頂点をすべて結ぶ) 得られるグラフを G/e とかいて, 辺 e による G の縮約 (【英】 contraction) という. この操作を繰り返すことで得られるグラフ G' を G の縮約とよぶ.

有限グラフ G とその縮約 A, B に対して,

$$A = B \text{ または } A \text{ が } B \text{ の縮約になる}$$

とき, $A \leq B$ と表す.

ここで, 集合 P に

- 任意の $x \in P$ は $x \leq x$ を満たす
- $x, y \in P$ に対して $x \leq y$ かつ $y \leq x$ であれば $x = y$
- $x, y, z \in P$ に対して $x \leq y$ かつ $y \leq z$ であれば $x \leq z$

を満たす関係 \leq が入るとき (P, \leq) を部分順序集合というのであった. つまり, 有限グラフ G の縮約全体は部分順序集合になっている.

有限集合の部分順序集合 P には Möbius 関数 $\mu: P \times P \rightarrow \mathbf{Z}$ が定義できる. これは, $\mu(x, x) = 1$ として, $x \neq z$ のとき

$$\sum_{x \leq y \leq z} \mu(x, y) = 0$$

で再帰的に定まる関数である. ここで, 部分順序集合 P のゼータ関数を

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \leq y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

で定義する. 部分順序集合が有限集合のとき, $P = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ とすると, (i, j) 成分に $\zeta(z_i, z_j)$ を入れた行列 Z は, (i, j) 成分に $\mu(z_i, z_j)$ を入れた行列 M と, $MZ = I$ の関係で作ることができる. また $ZM = I$ も成立するので

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = \begin{cases} 1 & (x = y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

も成立する.

Theorem 5.3 (反転公式 [2, Theorem 6.1.1] 参照). 関数 $f : P \rightarrow \mathbf{C}$ について

$$g(y) = \sum_{x \leq y} f(x)$$

とするとき, Möbius 関数 $\mu(x, y)$ について

$$f(y) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y)g(x)$$

が成立する.

Proof. 直接計算すると,

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq y} \mu(x, y)g(x) &= \sum_{x \leq y} \mu(x, y) \sum_{z \leq x} f(z) = \sum_{x \leq y} \sum_{z \leq x} \mu(x, y)f(z) \\ &= \sum_{z \leq y} \sum_{z \leq x \leq y} \mu(x, y)f(z) = \sum_{z \leq y} f(z) \sum_{z \leq x \leq y} \mu(x, y) = f(y) \end{aligned}$$

となり, 成り立つ. □

5.2 Proof of Theorem 5.2

有限グラフ G と部分グラフの彩色 C をとり, 組 (G, C) を考える. (G', C) が (G, C) の部分グラフであるとは, G' が G の縮約であり, かつ, 少なくとも1つの端点は C にあるようなグラフであることを意味する.

今までは彩色といえば「辺の両端の色が異なる」というルールで考えてきたが, ここではそのルールが満たされていない彩色も考える. **弱い意味での彩色** と言えば両端の色が同じものも含むとする. 「辺の両端の色が異なる彩色」は今まで通り単に**彩色**と呼ぶ. (通常「coloring」と言えば「辺の両端の色が異なる彩色」を指す. しかし, 弱い意味での彩色も考える場合, 弱い意味での彩色を「coloring」と呼び, 「辺の両端の色が異なる彩色」を「proper coloring」と呼ぶ.)

$p_{G', C}(\lambda)$ を λ 個の色を使った, C を含む G' の彩色の個数とする. $q_{G', C}(\lambda)$ を λ 個の色を使った C を含む G' の弱い意味での彩色の個数とする.

v を G の頂点の個数, v' を G' の頂点の個数, t を C の頂点 (彩色済) の個数とする. 明らかに $q_{G', C} = \lambda^{v'-t}$ となる. $\lambda \geq d_0$ のとき, λ 個の色による (G, C) の弱い意味での彩色は, 同じ色を両端に持つ辺の縮約によって彩色された1つの部分グラフ (G', C) を導く. すなわち,

$$q_{G, C}(\lambda) = \sum_{C \leq G' \leq G} p_{G', C}(\lambda)$$

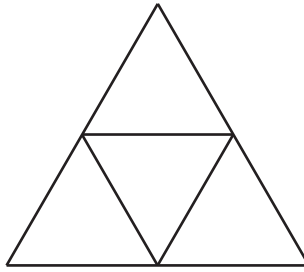
が成立する。Möbius の反転公式 (Theorem 5.3) によって,

$$p_{G,C} = \sum_{C \leq G' \leq G} \mu(G', G) q_{G',C}(\lambda) = \sum_{C \leq G'} \mu(G', G) \lambda^{v'-t}$$

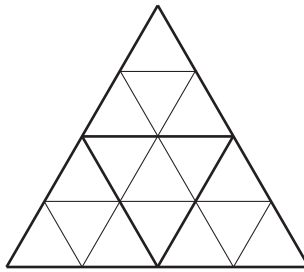
が成り立つ。右辺は整数係数の $v-t$ 次の多項式で、最高次の係数は 1 である。

6 三角数独

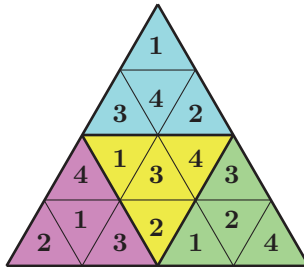
正方形でなくても、数独を考えることができる。例えば、 $n=2$ のとき、正三角形の各辺の中点をとって



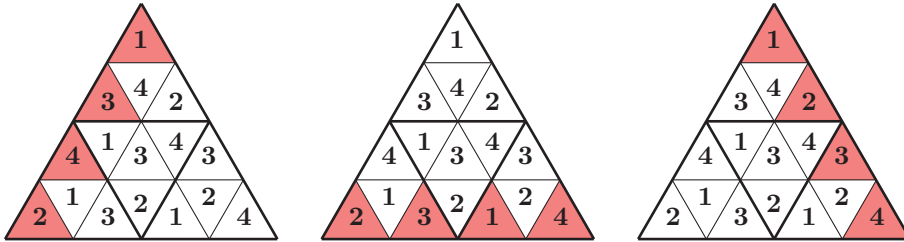
のように分割すれば、 $n^2 = 4$ 個の正三角形を作ることができる。さらに、この正三角形を $n^2 = 4$ 個並べることで、



のような正三角形のマスを $n^2 \times n^2$ 個作ることができる。ここで、4つの三角形それぞれの各マスに1から4までの数字を埋めるような数独パズルを考えることができる。実際、



は4つの三角形の各々について1から4までの数字が入っている. さらに, 一番外側の各辺と辺を共有する4つの正三角形について



のように1から4までの数字がすべて異なるように埋めるというルールを追加する. これらのルールは, 正三角形の一边を n 等分することによって, 一般の n に対して考えることができるから, 通常の正方形の数独の術語を真似て, 以下のように定義する.

Definition 6.1 (三角数独ルール). 1 辺を n 等分することで n^2 個の正三角形のマスをもつような正三角形が得られる. さらに, この n^2 個のマスをもつ正三角形を n^2 個並べてできるマス目を $n^2 \times n^2$ 三角格子 (【英】 **triangular grid**) といい, 最初に与えた n^2 個の正三角形のマスをもつような正三角形をその三角部分格子 (【英】 **triangular sub-grid**) という. 1 から n^2 までの数字を用いて,

- 任意の三角部分格子について, すべて異なる数字が入る
- $n^2 \times n^2$ 三角格子の一番外側のそれぞれの辺に対し, 辺を共有する n 個のマスについてすべて異なる数字が入る

という条件を満たすようにこの $n^2 \times n^2$ 三角格子を埋める.

同様に, 一般の n について三角数独パズルと三角数独方陣を以下のように定義する.

Definition 6.2 ($n^2 \times n^2$ 三角数独パズルと n 階三角数独方陣). n^2 個の三角部分格子を持つ $n^2 \times n^2$ 三角格子のマスのいくつかに, 1 から n^2 までの数字が

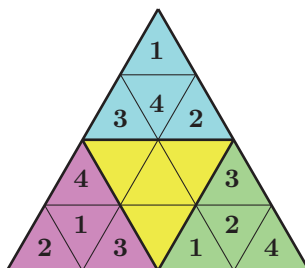
- 同じ $n \times n$ 三角部分格子に数字の重複がない
- 一番外側のそれぞれの辺に対し, 辺を共有する n 個のマスについて数字の重複がない

という条件を満たすように与えられているとき, $n^2 \times n^2$ 三角数独パズル (【英】 $n^2 \times n^2$ **triangular Sudoku puzzle**) という. 数独パズルが与えられたとき, その空白のマスすべてに,

- すべての $n \times n$ 三角部分格子について、1 から n^2 までの数字がすべて入る
- 一番外側の辺それぞれに対し、辺を共有する n 個のマスのについて、1 から n^2 までの数字がすべて入る

という条件を満たすように数字を入れたものを、三角数独パズルの解（【英】 **solution**）とよぶ。また、この2条件が満たされた $n^2 \times n^2$ 三角格子のことを n 階三角数独方陣という。

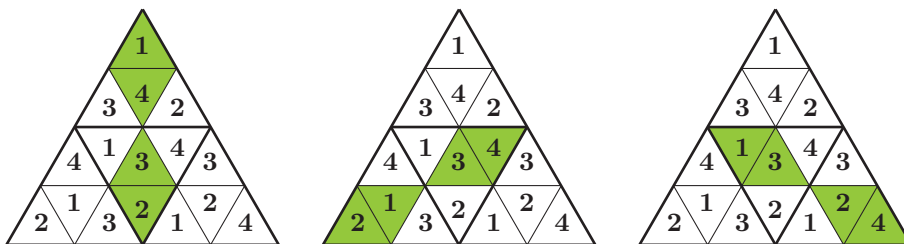
実際のパズルとしては、この定義では数字を埋める自由度が高すぎる。例えば、



のようなパズルでは、中央の三角部分格子については拘束条件が存在しないため、1 から 4 までの数字を自由に入れることができる。また、通常の正方形の数独パズルと異なり、1 列上に存在する三角形の個数が n^2 個でない部分もあるため、実際にある三角数独パズルでは様々な条件を追加したものが色々存在する。

7 $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣

2階三角数独方陣のうち、3つの垂直2等分線それぞれの線上にあるマスについて、



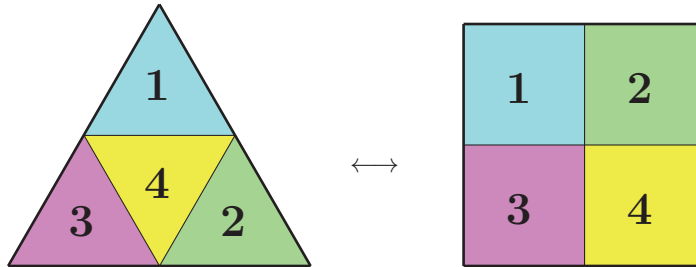
のように1から4までの数字がすべて異なる三角数独方陣が存在する。

Definition 7.1 ($n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣) . 三角数独方陣が、上図の3つの列についても、1から4までの数字がすべて異なるように埋められているとき、 $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣と呼ぶ。

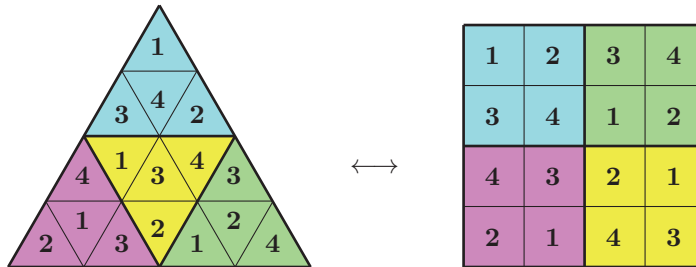
Remark 7.1.1. $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣はすべてのマスに何らかの条件が仮定されることに注意する。

Problem 3. 今定義した $n = 2$ のときの条件付き数独三角方陣はどのくらい存在するか？

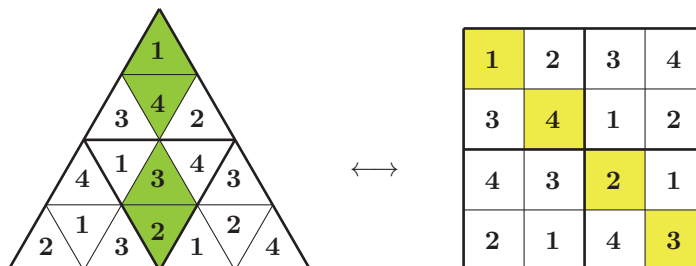
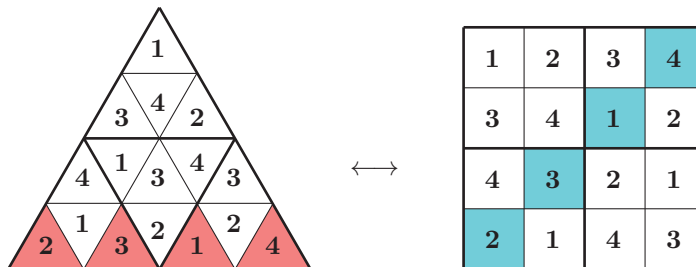
この問題を解くために、三角部分格子と通常の数独の部分格子の間に、以下の対応を考える。



この対応によって、三角数独方陣は通常の数独方陣と以下のように対応する。



この対応において、各々の三角部分格子と部分格子についても同様に対応させて、中央の黄色い三角部分格子については 180° 回転させて対応させていることに注意する。この対応で対応させた通常の数独方陣を見ると、

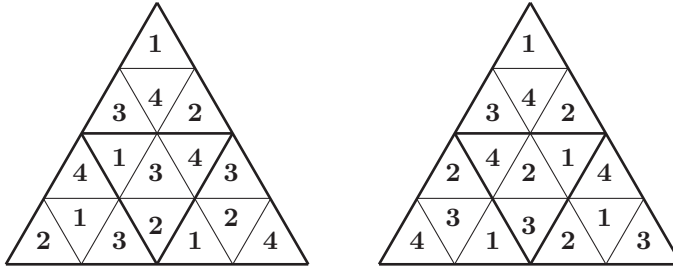


のように、 $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣は、通常の 2 階数独方陣に対角線のルールも追加したものに对应することがわかる。

Definition 7.2 (対角条件付き数独方陣). 通常の $n^2 \times n^2$ 数独方陣に、2つの対角線上それぞれについて、対角線上にある n^2 個のマスのについても 1 から n^2 までのすべて異なる数字が現れるという条件を追加した数独方陣を n 階対角条件付き数独方陣 (【英】 **Sudoku square with diagonal conditions of rank n**) という。

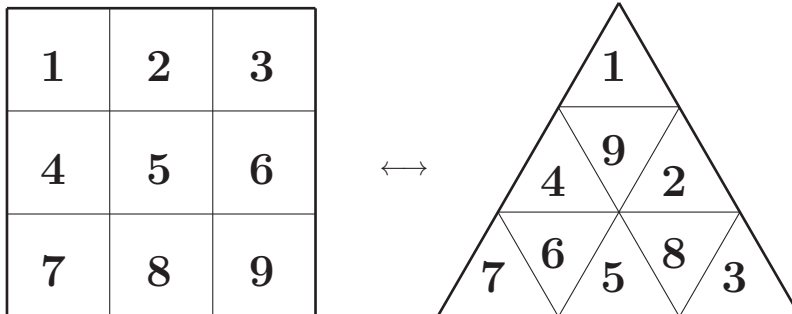
したがって、Proposition 1.3 で書き下した数独方陣のリストの中に対角条件を満たすものが 2 つしかないことから、以下の定理を得る。

Theorem 7.3. $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣は $4! \times 2 = 48$ 個しか存在しない。特に、数字の入れ換えを除いて、以下の 2 つのうちのいずれかに一致する。



8 $n = 3$ のときの条件付き三角数独方陣

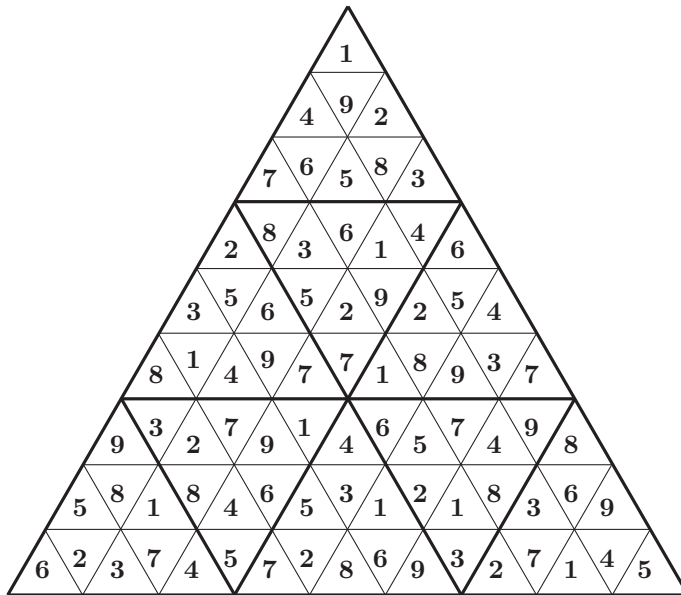
前節で確認した $n = 2$ のときの条件付き三角数独方陣と対角条件付き数独方陣の類似を $n = 3$ のときにも考察してみる。まず、通常の正方形の 3×3 部分方陣と 3×3 三角部分方陣との間の対応を



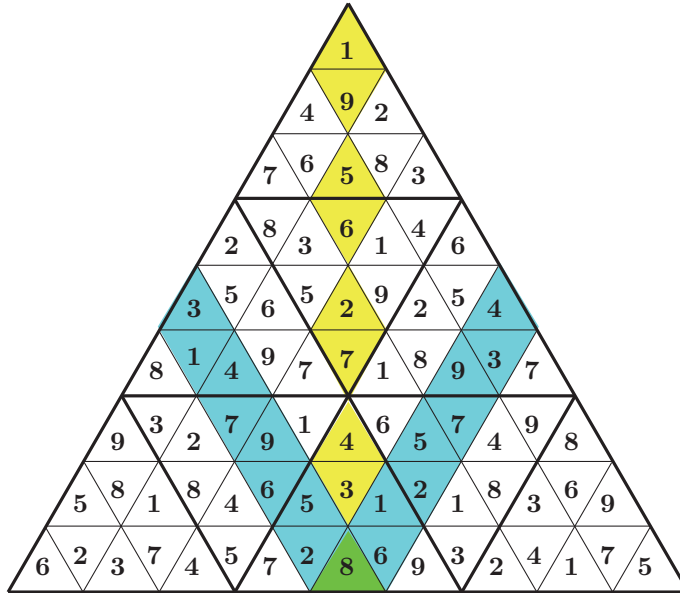
で定める。この対応によって、

1	2	3	6	4	7	8	9	5
4	5	6	2	9	8	3	1	7
7	8	9	1	3	5	2	4	6
2	6	7	4	1	9	5	8	3
3	4	1	5	8	2	6	7	9
8	9	5	7	6	3	1	2	4
9	1	4	3	2	6	7	5	8
5	3	2	8	7	4	9	6	1
6	7	8	9	5	1	4	3	2

という対角条件付き数独方陣は

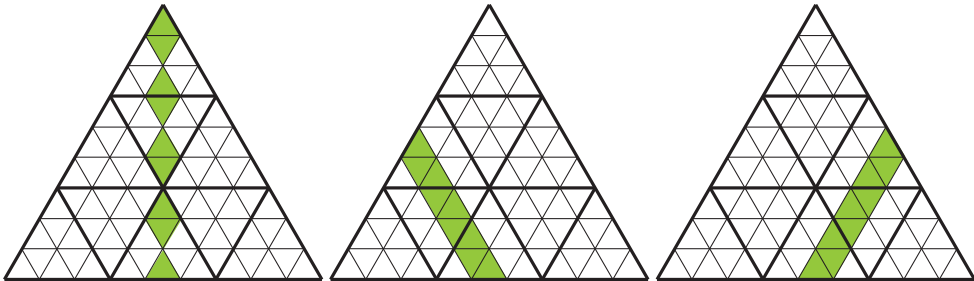


という三角数独方陣に対応する。ここで、それぞれの三角部分格子についても先程の対応で対応させることに注意する。また、下向きの正三角形に対しては 180° 回転させて数字を埋め込むことにも注意する。このとき、一番外側の3辺のそれぞれに対し、辺を共有する9つのマスについて1から9までの数字が重なりなく1つずつ現れるだけでなく、



のように3つの色の付いた線上についても、1から9までの数字が重なりなく1つずつ現れることがわかる。

Definition 8.1 ($n = 3$ のときの条件付き三角数独方陣) . 3階三角数独方陣が,



という3つの列についても、1から9までのすべて異なる数字が現れるとき、 $n = 3$ のときの条件付き数独三角方陣と呼ぶ。

Remark 8.1.1. $n = 2$ のときと違い $n = 3$ のときの条件付き数独三角方陣では、拘束条件がないマスが存在する。

以上の考察から、 $n = 2$ のときと同様に、 $n = 3$ のときの条件付き数独三角方陣の個数を対角条件付き数独方陣の個数で下から押さえられることがわかる。したがって、

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

の黄色い対角線上の空欄には $\{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ の 6 つの数字を重なりなく用い、水色の対角線上には緑色のマスと共有するように $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の 9 つの数字を重なりなく用いた (左上の 3×3 部分格子と色を付けたマス以外は空欄のままの) 対角条件付き $3^2 \times 3^2$ 数独パズルをすべて与え、各々の数独パズルが解を持つかどうかを計算機を用いて調べたところ、841,888 個の数独パズルについて解が存在することを確認できた。したがって、次の定理を得る。

Theorem 8.2. $n = 3$ のとき、上図で定まる対角条件付き $3^2 \times 3^2$ 数独パズルのうち、解をもつものは 841,888 個存在する。

Corollary 8.3. $n = 3$ のときの条件付き三角数学方陣は少なくとも $9! \times 841,888$ 個存在する。

参考文献

- [1] D. Berend, On the number of Sudoku squares, *Discrete Math.* **341** (2018), 3241–3248.
- [2] Sebastian M. Cioabă and M. Ram Murty, *A first course in graph theory and combinatorics*, Texts and Readings in Mathematics **55** (2009), Hindustan book agency.
- [3] S. Bammel and J. Rothstein, The number of 9×9 Latin squares, *Discrete Math.* **11** (1975), 93–95.
- [4] B. Felgenhauer and A. F. Jarvis, Mathematics of Sudoku I, *Mathematical spectrum* **39** (2006), 15–22.

- [5] Agnes M. Herzberg and M. Ram Murty, Sudoku squares and chromatic polynomials, *Notices of the Amer. Math. Society* **54** (2007), no. 6, 708–717.
- [6] G. McGuire, B. Tugemann and G. Civario, There is no 16-clue sudoku: Solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration, *Experimental Mathematics* **23** (2014), (2), 190–217.
- [7] E. Russell and A. F. Jarvis, Mathematics of Sudoku II, *Mathematical spectrum* **39** (2006), 54–58.
- [8] J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A course in combinatorics* (1992), Cambridge University Press.