Moment Mapのすすめ（I）

池森　　均
北門新作
佐藤俊郎
松井吉光

要　　約：Moment mapとは、力学系における保存量としての運動量などの概念を一般化して、symplectic manifold上の幾何学的な量に対する群の作用によって定義した写像を意味する。数学的なmoment mapの定義は、物理的直感が利かず、物理学者にとってはなかなか馴染みにくい。そこで、本稿ではmoment mapの定義を物理学的に解釈し、またそれに関わる重要な帰結を物理学の立場で整理し、その重要性について考察する。今回は特に内容を古典力学系に絞って報告する。

キーワード：Moment map、Symplectic manifold

1．はじめに

力学的エネルギー、運動量、角運動量、これらはひとつの力学系において保存量として知られている物理量である。即ち、ある力のもとで力学的対象である物体の運動を考えるとき、それらは常に一定の値に保たれるという意味をもっている。ところが、これらの量は別の側面を持っている。それは、運動の時間発展の生成子という側面である。たとえば、運動量は並進運動を引き起こす生成子であり、角運動量はある軸のまわりの回転運動を引き起こす生成子である。

解析力学における一般化座標（q_i）と一般化運動量（p_i）から形成される位相空間はsymplecticな空間である。symplecticな空間とは、symplectic 2-form

$$\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$$

が存在し、これによりある物理量f, gに対するHamiltonian vector fieldをX_f, X_gとするとPoisson bracketとして

$$\omega(X_f, X_g) = \{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

が定義されるような空間のことであり、このsymplectic 2-formが備わっている位相空間のことをsymplectic manifoldという。Moment mapとは、力学系における保存量としての運動量などの概念を一般化して、symplectic manifold上の幾何学的な量に対する群の作用によって定義した写像を意味する[1]。

簡単に言うと、これから議論していくmoment mapとはphase spaceの座標（q_i, p_i）に対して群Gを作用させたときに、その作用

した後のphase spaceが再びsymplecticであることが保証される（即ち、symplectic 2-formが保存される）ような群作用の生成子のことだという見方が出来る。実は、上で列挙した力学的保存量は、すべてphase spaceに作用するある種の群の作用に関連して出てくるmoment mapであるという見方ができる。

また、ある種の条件を課したgauge場のsystemは、無限次元の古典力学的なphase spaceとみなすことができて、そこにはsymplecticな構造（即ち、symplectic 2-form）を導入することができる。したがって、当然そこにmoment mapという概念が存在し得るはずである。その結果、例えば4次元のgauge理論では（anti-)self dual equationがmoment mapと考えることが出来るということが示される。つまり、(anti-)self dual equationが角運動量などと同じ役割を果たし、系の保存量のひとつとしての重要性を持っている可能性を意味している[2][3]。

このように、実はmoment mapという見方が物理学的に重要な意味を持っている可能性がある。ところが、これまでmoment mapという考え方と、それに関わる問題は数学的にはsymplectic幾何学としての研究対象のひとつとなってきたようだが、物理学的にはあまり注目されてこなかった。数学的なmoment mapの定義は物理的直感が利かず、物理学者にとってはなかなか馴染みにくい。そこで、本稿ではmoment mapの定義を物理学的に解釈し、またそれに関わる重要な帰結を物理学の立場で整理し、その重要性について考察する。

今回は特に内容を古典力学系に絞って考察し、特に興味深いgauge場に関するmoment mapの考察は改めて別の機会に報告することにしたい。

本稿の構成は、以下のようになっている。

1. はじめに
2. Symplectic manifoldとmoment mapの定義
3. 古典力学におけるmoment mapの簡単な例
4. Symplectic quotientとMarsden-Weinstein theorem
5. Runge-Lenz vectorとmoment map
6. まとめ

2．Symplectic ManifoldとMoment Mapの定義

2．1．Symplectic Manifold

symplectic manifoldとは、symplectic 2-form（symplectic structure）と呼ばれる非退化な閉形式である2-form ωを持つ滑らかな多様体Mのことである。ここでωが非退化であるとは、任意の$p \in M$において、すべての$Y \in T_pM$に対して、$\omega(X, Y)=0$を満たすような0でない接ベクトル場$X \in T_pM$が存在しないということである。また、ωが閉形式であるとは、ωの外微分$d\omega$が恒等的に0であることを意味する。

したがって、symplectic manifoldとは、manifold Mとその上のsymplectic 2-form ωの対（M, ω）で指定される。

たとえば、古典力学系におけるphase space (q_i, p_i)は典型的なsymplectic manifoldであって、その場合のsymplectic 2-formは$\omega = dq_i \wedge dp_i$で定義される。この$\omega$の形から明らかなように、多様体$M$は偶数次元であることが必然的に要請される。

2．2．Moment Map

moment mapを数学的に定義すると、以下のようになる[1][4]：

symplectic manifold（即ち、閉じていて非

退化なsymplectic 2-form ωが備わっているmanifold）Mがあって、そのmanifoldに対してLie群Gが作用するとき、写像

$$\mu\ :\ M \to \mathfrak{g}^*$$

が以下の条件を満たす場合、μをmoment mapという。

1. 任意の$x \in M$に対して$\mu(g \cdot x) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\mu(x)\ (g \in G)$が成り立つ。

2. Gの作用によるtangent vector field Xに対して、$i_X\omega = d\mu$が成り立つ。

1. はμがequivariantであるということを保証する条件だが、特に2. が重要な意味を持っている。なぜなら、2-formに対するtangent vector field X方向へのLie微分が

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega)$$

で定義されることから、ωがsymplectic 2-formであるとすれば、$i_X\omega = d\mu$は$\mathcal{L}_X\omega = 0$であるための、即ちX方向へのωの不変性を保つための必要十分条件となっているからである。

上述がmoment mapの数学的な定義であるが、これは物理学的には何を意味しているのか。物理的な立場から噛み砕いて言うと以下のようになる。

まず、古典力学的にはphase space（q_i, p_i）がsymplectic manifoldになっていることが重要で、それはωの存在が保証してくれる。つまり、例えばωとして$dq_i \wedge dp_i$が存在すれば、ある物理量f, gに対するHamiltonian vector fieldをX_f, X_gとすると

$$\omega(X_f, X_g) = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \equiv \{f, g\}$$

となり、ωの存在によってphase space上でPoisson bracketを正しく与えることができるわけである。したがって、ある種の変換をphase space上で考えるとき、その変換でωが不変に保たれないと力学系が変化してしまうことになり、意味がなくなってしまう。要するに、symplectomorphicな変換だけが許され、様々な変換を考えるとき、ωを不変に保つように変換することが非常に重要な意味を持つ。物理学のことばでいえば、このような変換を正準変換と呼んでいる。つまり、正準変換以外の変換は意味がない。

ところで、あるmanifold上の座標をx_μとしたとき、その座標がある作用によりparameter tで変化する場合のtangent vector field Xは、

$$X = \frac{d}{dt} = \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

で定義される。特にそのmanifoldが（q_i, p_i）を座標とするphase spaceであるときのtangent vector fieldは

$$X = \left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial q_i} + \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

と書くことが出来る。ここで、もし

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q_i}$$

を満たすような関数hがあったとすると、そのときのtangent vector fieldをHamiltonian vector field X_hと呼び、

$$\frac{d}{dt} = X_h = \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = -\{h, \cdot\}$$

と書くことができる。この結果から明らかなように、hはphase spaceに作用する変換のgeneratorとなっている。今考えている作用が群Gによるものである場合、このhが上で

数学的に定義されたmoment map μである。この事実は以下のようにしてわかる：

このhが存在して、そのtangent vector fieldが上のようにHamiltonian vector field X_hで書けたとすると

$$
\begin{aligned}
& i_X\omega \equiv \omega(X,\cdot) \\
& = dq_i \wedge dp_i \left(\left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial q_i} + \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\
& = dq_i \wedge dp_i \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\
& = \frac{\partial h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial h}{\partial q_i} dq_i \\
& = dh
\end{aligned}
$$

となり、まさにhは定義にあった2. の条件を満たすmoment map μであることを示している。つまり、群がphase spaceに作用することによるtangent vector fieldがHamiltonian vector fieldとして表現できるということと、tangent vector field Xとωとのinterior productが、ある関数hの全微分dhと書けるということは等価であり、これらの条件が満たされているということは、群の作用がsymplectomorphicであること、即ち正準変換になっているということが保証されたことと等価である。

要するに、「phase spaceに対する群の作用による変換が（無限小）正準変換になっているときには必ずmoment mapが存在し、それはその（無限小）正準変換のgeneratorである。」ということができる。

3．古典力学におけるmoment map の簡単な例

ではここからは、もう少し具体的にmoment mapとしてどのようなものが考えられるかを見ていくことにしよう。

3．1．Harmonic OscillatorのHamiltonian

まず初めの例として、harmonic oscillatorのHamiltonian $h = \frac{1}{2}\left(q_i^2 + p_i^2\right)$がmoment mapであることを示す[1]。

phase spaceは$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$で、その座標は$(q_i, p_i)$、またsymplectic 2-formは$\omega = dq_i \wedge dp_i$で表されるものとする。

ところで、群Gによるphase space上の時間発展というだけならいろいろ考えられるはずだが、ここではGは$U(1)$で、このphase spaceに対して

$$x_\mu \to x_\mu(t) = (q_i, p_i)e^{i\lambda\sigma_2 t}$$

のように作用する場合を考えよう。すると

$$
\begin{aligned}
& \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} \\
& = \lambda(q_i, p_i) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
& = \lambda(-p_i, q_i)
\end{aligned}
$$

なので、このときtangent vector fieldは

$$
\begin{aligned}
X = & \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\
& = \lambda(-p_i,\ q_i) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\
& = \lambda\left(-p_i \frac{\partial}{\partial q_i} + q_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)
\end{aligned}
$$

と表される。それを$\omega(X, \cdot) = dh$の式に代入すると、直ちに

$$q_i dq_i + p_i dp_i = dh$$

となることがわかる。即ち、この式が成立するためには、定数項を除いて

$$h = \frac{1}{2}(q_i^2 + p_i^2)$$

でなければならないことがわかる。これがこの場合のmoment mapということである。これはharmonic oscillatorのHamiltonianそのものであり、言い換えればharmonic oscillatorのHamiltonianは、上のようなphase spaceへ

のU(1)群の作用によるmoment mapだということが出来る。

３．２．角運動量

次に、ここでは角運動量がmoment mapであることを見てみよう[1][4]。角運動量は３つあるので、それを$\mu_i(i=1,2,3)$と書くことにする。

角運動量は一般化座標と一般化運動量を３次元回転させることに相当するので、manifold上の座標に作用する群はSO(3)群である。この群を具体的に作用させるときの表現は色々あるが、今はPauli行列を利用して次のように表現することにする。

$$
\begin{aligned}
&(q_i,p_i)\sigma_i = (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\
&\to e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}\right)\Big|_{t=0} \\
&= i\lambda_i q_j[\sigma_i,\sigma_j] = -2\epsilon_{ijk}\lambda_i q_j\sigma_k \\
&\frac{d}{dt}\left(e^{i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}e^{-i\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}t}\right)\Big|_{t=0} \\
&= i\lambda_i p_j[\sigma_i,\sigma_j] = -2\epsilon_{ijk}\lambda_i p_j\sigma_k
\end{aligned}
$$

となり、tangent vector fieldは

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{dx_\mu}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\
&= -2\lambda_i(\epsilon_{ijk}q_j,\epsilon_{ijk}p_j)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial p_k}\end{pmatrix} \\
&= -2\lambda_i\left(\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial q_k}+\epsilon_{ijk}p_j\frac{\partial}{\partial p_k}\right)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。したがってoverallの定数係数を除けば

$$
\begin{aligned}
\omega(X,\cdot) &= \lambda_i(-\epsilon_{ijk}p_j dq_k+\epsilon_{ijk}q_j dp_k) \\
&= d(\lambda_i\epsilon_{ijk}q_j p_k)
\end{aligned}
$$

となる。したがって、

$$
\mu_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k
$$

が得られる。このmoment mapはまさに角運動量である。

３．３．Monopole場中の角運動量

ここで少し道草を食って、少々変わった例として原点にmonopole場が存在する空間の角運動量もmoment mapとして考えることが出来ることを見ておこう[5]。

まず、具体的にmoment mapの話に入る前に、設定を説明する。考えるべきmanifoldは、相変わらず$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$と考えるが、原点にmonopole（singularity）があるためにsymplectic 2-formの形がこれまでとは異なっていて、

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum dq_i\wedge dp_i \\
&-\frac{\mu}{r^3}(q_1 dq_2\wedge dq_3+q_2 dq_3\wedge dq_1+q_3 dq_1\wedge dq_2)
\end{aligned}
$$

を採用することが必要である。ただし、μはmonopole chargeである。（厳密に言うと、monopoleの存在によりphase spaceは$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ではなく$\dot{\mathbb{R}}^3\times\mathbb{R}^3$ということになっており、そのため上のような$\omega$の採用が必要になるわけである。）この$\omega$も非退化であり閉形式であることは明らかなので、これをsymplectic 2-formとして採用することに問題は無い。そしてM上の関数fに対するHamiltonian vector field X_fは、これまで通り

$$
X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}
$$

と考える。すると

$$
\begin{aligned}
&\omega(X_{f_1}, X_{f_2}) \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i} - \frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \\
&- \frac{\mu}{r^3}\left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial p_3} - \frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial f_2}{\partial p_2}\right) q_1\right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_3}\frac{\partial f_2}{\partial p_1} - \frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_3}\right) q_2 \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial f_1}{\partial p_1}\frac{\partial f_2}{\partial p_2} - \frac{\partial f_1}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial p_1}\right) q_3\right] \\
&= \{f_1, f_2\}_{qp} \\
&- \frac{\mu}{r^3}\Big[\{f_1, f_2\}_{p_2 p_3} q_1 \\
&\quad + \{f_1, f_2\}_{p_3 p_1} q_2 \\
&\quad + \{f_1, f_2\}_{p_1 p_2} q_3\Big] \\
&\equiv \{f_1, f_2\}
\end{aligned}
$$

となり、これをPoisson bracket とする。

3. 3. 1. 回転の生成子としての角運動量

以上のような設定を与えると、上記のPoisson bracketを使って回転を生成する角運動量が

$$J_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu \frac{q_i}{r}$$

であることがわかる。実際、まずq_j に対しては、J_i は第２項の存在に関わらず

$$\{J_i, q_l\} = \left\{\epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu\frac{q_i}{r}, q_l\right\} = \epsilon_{ilk} q_k$$

であり、座標の回転を生成していることがわかる。それに対して、p_j についてては

$$
\begin{aligned}
\{J_i, p_l\} &= \left\{\epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu\frac{q_i}{r}, p_l\right\} \\
&= \{\epsilon_{ijk} q_j p_k, p_l\} + \mu\left\{\frac{q_i}{r}, p_l\right\}
\end{aligned}
$$

であり、この第１項は

$$
\begin{aligned}
&\{\epsilon_{ijk} q_j p_k, p_l\} \\
&= \epsilon_{ilk} p_k \\
&\quad - \frac{\mu}{r^3}\Big[(q_1 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k2}\delta_{l3} - q_1 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k3}\delta_{l2}) \\
&\quad + (q_2 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k3}\delta_{l1} - q_2 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k1}\delta_{l3}) \\
&\quad + (q_3 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k1}\delta_{l2} - q_3 \epsilon_{ijk} q_j \delta_{k2}\delta_{l1})\Big] \\
&\quad = \epsilon_{ilk} p_k - \mu\frac{\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l}{r}
\end{aligned}
$$

$$\left(\text{ここで } \hat{q}_i \equiv \frac{q_i}{r}\right)$$

となるため、それだけでは閉じていない。しかし、第２項が

$$\mu\left\{\frac{q_i}{r}, p_l\right\} = \mu\frac{\delta_{il} - \hat{q}_i \hat{q}_l}{r}$$

であることが分かり、この項と余計な項がcancelして全体として運動量の回転も生成することがわかる。

3. 3. 2. 角運動量保存

moment map自体は系のdynamicsの情報をもつ概念ではないが、J_iが保存するHamiltonianは形が制限されることを示して置く。例えば$H = p_i^2 + \dfrac{\mu^2}{r^2}$とする。つまり第２項の存在が重要である。

$$
\begin{aligned}
&\{H, J_i\} \\
&= \left\{p_l^2 + \frac{\mu}{r^2},\ \epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu\frac{q_i}{r}\right\} \\
&= \left\{p_l^2,\ \epsilon_{ijk} q_j p_k\right\} + \left\{p_l^2,\ \mu\frac{q_i}{r}\right\} \\
&\quad + \mu^2\left\{\frac{1}{r^2},\ \epsilon_{ijk} q_j p_k\right\} + \left\{\frac{\mu}{r^2},\ \mu\frac{q_i}{r}\right\}
\end{aligned}
$$

まず、第４項は明らかに0である。残りの３項を順次計算すると

$$
\begin{aligned}
\text{第1項} &= \left\{p_l^2,\ \epsilon_{ijk} q_j p_k\right\} \\
&= -\frac{2\mu}{r^3}\left(q_i(\vec{p}\cdot\vec{q}) - p_i r^2\right) \\
\text{第2項} &= \left\{p_l^2,\ \mu\frac{q_i}{r}\right\} \\
&= \frac{2\mu}{r^3}\left(q_i(\vec{p}\cdot\vec{q}) - p_i r^2\right) \\
\text{第3項} &= \mu^2\left\{\frac{1}{r^2},\ \epsilon_{ijk} q_j p_k\right\} \\
&= \mu^2 \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{1}{r^2}\right)\epsilon_{ijk} q_i \delta_{kl} = 0
\end{aligned}
$$

となり、全体としてHamiltonianと交換することがわかるので、J_iはこのHamiltonianのもとでは保存する。言い換えると、たとえ位相空間が単純な$M=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$であったとしても、付随するsymplectic 2-formが

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sum dq_i \wedge dp_i \\
&\quad - \frac{\mu}{r^3}(q_1 dq_2\wedge dq_3 + q_2 dq_3 \wedge dq_1 + q_3 dq_1 \wedge dq_2)
\end{aligned}
$$

であるとすると、角運動量が保存するような力学系を考える場合には上記Hamiltonianのようなものに制限されるということになる。（これは後に出てくるRunge-Lenz vectorはKepler項がないと保存しないという事情に似ている。）ただし、Kepler項やharmonic oscillatorのpotential項があっても問題は無い。

3. 3. 3. Moment MapとしてのMonopole場中の角運動量

2. 3. 1で示した通りJ_iはSO(3)群の生成子になっていて、symplectic manifoldの座標に作用すると回転を引き起こしていたから、この群が作用することによるtangent vector fieldは、$\omega = dq_i \wedge dp_i$のときのものと同じで

$$
X_i^J = \epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial q_k} + \epsilon_{ijk} p_j \frac{\partial}{\partial p_k}
$$

である。これを使って$\omega(X_i^J,\cdot)$をつくると

$$
\begin{aligned}
\omega(X_i^J,\cdot) &= -\epsilon_{ijk} q_j dp_k + \epsilon_{ijk} p_j dq_k \\
&\quad - \frac{\mu}{r^3}\Big[(\epsilon_{ij2} q_3 - \epsilon_{ij3} q_2) q_j dq_1 \\
&\quad + (\epsilon_{ij3} q_1 - \epsilon_{ij1} q_3) q_j dq_2 \\
&\quad + (\epsilon_{ij1} q_2 - \epsilon_{ij2} q_1) q_j dq_3\Big]
\end{aligned}
$$

となる。ここでもし、moment map J_iが存在するならば、dJ_iが上式の右辺になるはずである。まず、第1項と第2項はまとめて書けば

$$
d\left(\epsilon_{ijk} q_j p_k\right)
$$

となることは明らかである。次に、$\omega(X_i^J,\cdot)$のμに比例する項を見てみると、それは丁寧に整理していくと

$$
\frac{\mu}{r^3}\left(-\epsilon_{klm}\epsilon_{ijk} q_l q_j dq_m\right)
$$

とまとめることができる。これは

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mu}{r^3}\left(-\epsilon_{klm}\epsilon_{ijk} q_l q_j dq_m\right) \\
&= \frac{\mu}{r^3}\left(-\delta_{li}\delta_{mj} + \delta_{lj}\delta_{mi}\right) q_l q_j dq_m \\
&= \frac{\mu}{r^3}(q^2 \delta_{im} - q_i q_m) dq_m
\end{aligned}
$$

であり、$q^2 = r^2$ なので、右辺は$d\left(\frac{q_i}{r}\right)$であることがわかり、結局

$$
-\frac{1}{r^3}\epsilon_{klm}\epsilon_{kij} q_l q_j dq_m = d\left(\frac{q_i}{r}\right)
$$

である。したがって、これらをまとめれば

$$
\omega(X_i^J,\cdot) = d\left(\epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu\frac{q_i}{r}\right)
$$

と書くことが出来るので、今の場合$J_i = \epsilon_{ijk} q_j p_k + \mu\frac{q_i}{r}$がmoment mapであることがわかる。

4. Symplectic Quotient とMarsden-Weinstein Theorem

さて、ここまでの話の流れをみていると、あたかも力学的保存量（Noether charge）のことを全てmoment mapと言い直しているだけのように思える。ところが、それほど単純

な話ではない。moment mapという概念は、dynamicsとは無関係な量である。力学系がどのようなHamiltonianで表されているか、どのようなLagrangianで書けているかは全く関係ない。考えるべきことはただ単に、今どのようなsymplectic 2-formが備えられているphase spaceを考えていて、そこにどのような群が作用し得るかだけである。つまり、力学的な量ではなく位相空間の幾何学的な量としてmoment mapは与えられている。したがって、単に力学的保存量をmoment mapと言い換えたというわけではない。実際、ここまでの話の中でmoment mapが力学的に保存する量であるとか、一定の値にならなければならない量であるとは一言も言っていない。

言い方を換えると、力学的保存量であるにも関わらずmoment mapとならないものも存在する。例えば、harmonic oscillatorのHamiltonianがmoment mapであることを示したが、Kepler問題のHamiltonianはそのままではmoment mapとは考えられない。またKepler問題のsystemにはHamiltonianや角運動量のようなNoether chargeの他に、もう一つ保存量が存在することが知られていて、それをRunge Lenz（RL）vectorと呼ぶが[6][7][8]、この保存量は力学的エネルギーが保存することを前提として考えると角運動量とペアを組んでSO(3)×SO(3)の群の一部の生成子となることが知られている[9]。しかし、後で見るように、このRL vectorもmoment mapとは考えられない。以下、少しこれらの話題について考察してみたい。しかし、そのためにはまずsymplectic quotientとMarsden-Weinsteinの定理が重要且つ必要な概念となるので、それについて解説する。

Marsden-Weinstein theoremとsymplectic quotientの定義は、数学的には以下のようなものである[10]。：

Mをsymplectic 2-form ωが備わっているsymplectic manifoldとする。また、compact Lie群GがMに作用し、そのときのmoment mapをμとする。そのとき、写像$i:\mu^{-1}(0)\hookrightarrow M$は包含写像（inclusion）であり、$G$は自由に$\mu^{-1}(0)$に作用すると仮定する。そのとき

- 軌道空間$M_{\rm red}=\mu^{-1}(0)/G$はmanifoldである。
- 写像$\pi:\mu^{-1}(0)\to M_{\rm red}$はprincipal G-bundleである。
- $M_{\rm red}$には$i^*\omega=\pi^*\omega_{\rm red}$を満たすsymplectic 2-form $\omega_{\rm red}$が存在する。

これがMarsden-Weinstein theoremであり、($M_{\rm red}$, $\omega_{\rm red}$)は(M, ω)のG, μについてのsymplectic quotient、もしくはMarsden-Weinstein-Meyer quotientと呼ばれ、単にreduced spaceやreductionと呼ばれることもある。

4．1．Symplectic QuotientとMarsden-Weinstein Theorem の具体例

分かりづらいので、簡単な例で上述の定理を考えてみる[4]。今、symplectic manifoldとして$M=\mathbb{C}^2$を考え、Mの座標は$(z_1, z_2)^{\rm T}$とする。そのとき、symplectic 2-formを$dz_i\wedge d\bar{z}_i$として、Mに$G=\mathrm{U}(1)$が作用する場合を考える。Gは

$$z_i\to e^{i\lambda t}z_i$$

と作用することにすると、そのときのmoment map μは直ちに

$$\mu=i\bar{z}_iz_i$$

であることがわかる。即ち、$\mu=\zeta$とすると、$\mu^{-1}(\zeta)$はS^3超曲面を表している。これを改めて$G=\mathrm{U}(1)=S^1$で割ってその商空間を作ると、よく知られているようにHopf map $S^3/S^1=S^2$が得られる。つまり、この場合S^2がsymplectic quotientであるということ

になる。そして、S^2は偶数次元なので、再びsymplectic manifoldになり得る。実際、Weinstein & Marsden theoremにより、このS^2にも正しくsymplectic 2-formが定義できる。

では、この例をもう少し詳しく見ながらsymplectic quotientとMarsden-Weinstein theoremについて理解を深めたい。Mの座標$z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}}$の$z_i$を$z_i = x_i + iy_i$と表すことにする。このとき$M$に対する$G$ =U(1)の微小変換は次のように作用する。

$$z_i \to e^{i\epsilon t} z_i \cong (1 + i\epsilon t) z_i, \qquad (1)$$
$$\bar{z}_i \to e^{-i\epsilon t} \bar{z}_i \cong (1 - i\epsilon t) \bar{z}_i$$

したがって

$$\frac{dz_i}{dt} = i\epsilon z_i,$$
$$\frac{d\bar{z}_i}{dt} = -i\epsilon \bar{z}_i$$

である。これより、このG変換に対するtangent vector field X_zは

$$X_z = \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{d\bar{z}_i}{dt}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = i\epsilon z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - i\epsilon \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$$

と表される。これがHamiltonian vector field X_μ

$$X_\mu = \frac{\partial \mu}{\partial \bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{\partial \mu}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$$

と等しいためには、微小量ϵを除いてこのG変換に対するmoment map μが

$$\mu = i\bar{z}_i z_i + \text{const.}$$
$$= i(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + \text{const.}$$

（定数分の任意性が残っている）

であることは明らかである。

では、このときのsymplectic quotientはどのように表されるだろうか。symplectic quotientはS^2なので、その座標を３次元の座標q_a（a = 1, 2, 3）で表すことにすると、q_aとz_iの最も合理的な関係は

$$q_a = \bar{z}\sigma_a z \quad (a = 1, 2, 3)$$

である。実際、このようにq_aを表現すると、上のU(1)変換に対してq_aが不変であることは明らかである。つまり、このU(1)変換のgeneratorであるmoment map μとq_aのPoisson bracketが

$$\{\mu, q_a\} = 0$$

であることが容易に確かめられる。また、μ自身も当然U(1)変換に対して不変量だといえるので、μとq_aを合わせて

$$q_\alpha = \bar{z}\sigma_\alpha z \quad (\alpha = 0, 1, 2, 3,\ \sigma_0 = 1)$$

と表現することもできる。ここでもし$\bar{z}_i z_i = \zeta$ = const.とするならば、$(q_a)^2 = \zeta^2$、即ちq_aは半径ζのS^2の座標であることが分かり、トータルで自由度が２つ消えて2次元の空間となることがわかる。

ところで、Mのsymplectic 2-formはx_iとy_iを使って表すと

$$\begin{aligned} &dz_i \wedge d\bar{z}_i \\ =&(dx_1 + idy_1) \wedge (dx_1 - idy_1) \\ &+ (dx_2 + idy_2) \wedge (dx_2 - idy_2) \\ =& -2i(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) \end{aligned}$$

である。一方、一般的にS^2のsymplectic 2-formは極座標を使うと

$$\omega = \sin\theta d\theta \wedge d\phi.$$

であることが知られている。これらの2-formにはどのような関係があるだろうか。

Mにもどって$\bar{z}_i z_i = \zeta$が定数であることから

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + y_1 dy_1 + y_2 dy_2 = 0$$

である。次に、$q_a = \bar{z}\sigma_a z$を成分で見ると

$$q_1 = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = \sin\theta\cos\phi$$
$$q_2 = 2(x_1y_2 - x_2y_1) = \sin\theta\sin\phi$$
$$q_3 = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = \cos\theta$$

であり

$$\begin{aligned} dq_1 &= 2(x_2dx_1 + x_1dx_2 + y_2dy_1 + y_1dy_2) \\ &= \cos\theta\cos\phi d\theta - \sin\theta\sin\phi d\phi \\ dq_2 &= 2(y_2dx_1 - y_1dx_2 - x_2dy_1 + x_1dy_2) \\ &= \cos\theta\sin\phi d\theta + \sin\theta\cos\phi d\phi \\ dq_3 &= 2(x_1dx_1 - x_2dx_2 + y_1dy_1 - y_2dy_2) \\ &= -\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、例えば$dq_1 \wedge dq_2$を見てみる。

$$\begin{aligned} &dq_1 \wedge dq_2 \\ &= 4\{-(x_1y_2 + x_2y_1)dx_1 \wedge dx_2 \\ &- (x_2^2 + y_2^2)dx_1 \wedge dy_1 \\ &+ (x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 \\ &- (x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 \\ &+ (x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 \\ &+ (x_1y_2 + x_2y_1)dy_1 \wedge dy_2\} \end{aligned}$$

同様にして、同じ式をS^2の変数 θ, ϕで表せば

$$\begin{aligned} dq_1 \wedge dq_2 &= \cos\theta\sin\theta d\theta \wedge d\phi \\ &= q_3 \sin\theta d\theta \wedge d\phi \end{aligned}$$

と書くこともできるはずである。これらが同じものであることは以下からわかる。

$x_1dx_1 = -x_2dx_2 - y_1dy_1 - y_2dy_2$

であったから

$$\begin{aligned} &x_1y_2dx_1 \wedge dx_2 \\ &= y_2(-x_2dx_2 - y_1dy_1 - y_2dy_2) \wedge dx_2 \\ &= y_1y_2dx_2 \wedge dy_1 + y_2^2dx_2 \wedge dy_2 \\ &x_2y_1dx_1 \wedge dx_2 \\ &= y_1dx_1 \wedge (-x_1dx_1 - y_1dy_1 - y_2dy_2) \\ &= -y_1^2dx_1 \wedge dy_1 - y_1y_2dx_1 \wedge dy_2 \end{aligned}$$

であり、同様にして

$$\begin{aligned} &x_1y_2dy_1 \wedge dy_2 \\ &= x_1dy_1 \wedge (-x_1dx_1 - x_2dx_2 - y_1dy_1) \\ &= x_1^2dx_1 \wedge dy_1 + x_1x_2dx_2 \wedge dy_1 \\ &x_2y_1dy_1 \wedge dy_2 \\ &= x_2(-x_1dx_1 - x_2dx_2 - y_2dy_2) \wedge dy_2 \\ &= -x_1x_2dx_1 \wedge dy_2 - x_2^2dx_2 \wedge dy_2 \end{aligned}$$

となる。これらを$dq_1 \wedge dq_2$の式に代入すると

$$\begin{aligned} &dq_1 \wedge dq_2 \\ &= 4\{-(x_1y_2 + x_2y_1)dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad - (x_2^2 + y_2^2)dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + (x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 \\ &\quad - (x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 \\ &\quad + (x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 \\ &\quad + (x_1y_2 + x_2y_1)dy_1 \wedge dy_2\} \\ &= -y_1y_2dx_2 \wedge dy_1 \\ &\quad - y_2^2dx_2 \wedge dy_2 + y_1^2dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + y_1y_2dx_1 \wedge dy_2 - (x_2^2 + y_2^2)dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + (x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 \\ &\quad - (x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 \\ &\quad + (x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 \\ &\quad + (x_1x_2 - y_1y_2)dx_1 \wedge dy_2 \\ &\quad - (x_1x_2 - y_1y_2)dx_2 \wedge dy_1 \\ &\quad + (x_1^2 + y_1^2)dx_2 \wedge dy_2 \\ &\quad + x_1^2dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + x_1x_2dx_2 \wedge dy_1 - x_1x_2dx_1 \wedge dy_2 \\ &\quad - x_2^2dx_2 \wedge dy_2 \\ &= 4(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)dx_1 \wedge dy_1 \\ &\quad + 4(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)dx_2 \wedge dy_2 \\ &= 4q_3(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) \end{aligned}$$

よって

$$4(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) = \sin\theta d\theta \wedge d\phi$$

以上より、moment map $\mu = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = \zeta$ = const. のもとで、μの値に関わらず元のsymplecticな空間Mのsymplectic 2-formとsymplectic quotientである$\mu^{-1}(\zeta)/G$のsymplectic 2-formは、係数を除いて完全に一致する。この事実を数学的にみれば、所謂Marsden-Weinstein theoremということができる。

このように、位相幾何学的な文脈でいうところのHopf mapは、symplectic幾何学的に見るとsymplectic quotientの具体的な例のひとつであるということがわかる。

ただ、ここで大切なことは、Marsden-Weinstein theorem が成り立つのは、次元のreductionがsymplectic reductionのときに限るということであろう。ここでは証明していないが、例えば適当な拘束条件を課して次元をreduceしてもreduceする前のsymplectic 2-formがreduce後の世界でもそのままその世界でのsymplectic 2-formになるという保証は何もない。あくまでmoment mapによるsymplectic reductionだからこそ成立するtheoremだということが重要である。

4.2. その他のSymplectic Quotientの例

4.2.1. $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$から$M_{\mathrm{red}} = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$へのreduction

ここで、もうひとつ簡単な例を示しておこう。今度はMの座標を$z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}} = (x_1 + ix_2, y_2 + iy_2)^{\mathrm{T}}$と組み直し、symplectic 2-formは$\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$のままであるとする。このとき$M$に対して$G = \mathrm{U}(1)$の作用による微小変換が次のように与えられるものとする。

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &\to e^{-i\epsilon t}(x_1 + ix_2) \\ &\cong (1 - i\epsilon t)(x_1 + ix_2) \\ &= (x_1 + \epsilon t x_2) + i(x_2 - \epsilon t x_1), \\ y_1 + iy_2 &\to e^{-i\epsilon t}(y_1 + iy_2) \\ &\cong (1 - i\epsilon t)(y_1 + iy_2) \\ &= (y_1 + \epsilon t y_2) + i(y_2 - \epsilon t y_1) \end{aligned} \tag{2}$$

つまり

$$x_i \to x_i + \epsilon t \varepsilon_{ij} x_j$$
$$y_i \to y_i + \epsilon t \varepsilon_{ij} y_j$$

である。したがって

$$\frac{dx_i}{dt} = \epsilon\varepsilon_{ij}x_j, \quad \frac{dy_i}{dt} = \epsilon\varepsilon_{ij}y_i$$

となり、これによってtangent vector field X_zは

$$\begin{aligned} X_z &= \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial}{\partial y_i} \\ &= \epsilon\varepsilon_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_i} + \epsilon\varepsilon_{ij}y_i\frac{\partial}{\partial y_i} \end{aligned}$$

となる。これがHamiltonian vector field X_μ

$$X_\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial\mu}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と等しいためにはmoment map μは

$$\mu = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

であることがわかる。これはx_iを空間座標、y_iを運動量と考えると、所謂２次元平面の角運動量である。

次に、このmoment map μが一定の値ζであるような部分空間$\mu^{-1}(\zeta)$を考え、さらにそのsymplectic quotient $\mu^{-1}(\zeta)/U(1) \simeq \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$を考える。例えば

$$Q = \begin{pmatrix} q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} p \\ \mu/2q \end{pmatrix} = \frac{1}{2q} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2q} \begin{pmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix}$$

というものを導入すると、Q, Pは(2)の変換に対して不変になっていることは容易に確かめられる。そこで、p, qをsymplectic quotient $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$空間の座標と考えてみることにする。つまり

$$q = x_1^2 + x_2^2\ ,$$
$$p = \frac{1}{2q}(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

と考えてみるということである。するとこのとき、symplectic 2-formも$dq \wedge dp = dx_i \wedge dy_i$であることが、直ちに以下のように示される。

$$dq = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$$

$$dp = -\frac{1}{2q^2} dq (x_1 y_1 + x_2 y_2) + \frac{1}{2q}(y_1 dx_1 + x_1 dy_1 + y_2 dx_2 + x_2 dy_2)$$

$$\begin{aligned} & dq \wedge dp \\ &= \frac{1}{q}(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \\ & \wedge (y_1 dx_1 + x_1 dy_1 + y_2 dx_2 + x_2 dy_2) \\ &= \frac{1}{q}(x_1^2 dx_1 \wedge dy_1 \\ & + x_1 y_2 dx_1 \wedge dx_2 + x_1 x_2 dx_1 \wedge dy_2 \\ & + x_2 y_1 dx_2 \wedge dx_1 + x_1 x_2 dx_2 \wedge dy_1 \\ & + x_2^2 dx_2 \wedge dy_2) \end{aligned}$$

ただし、$dx_i \wedge dx_i = dy_i \wedge dy_i = 0$であることを使った。さらに、ここでmoment map $\mu = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \text{const.}$であるような部分空間を考えていることから

$$y_2 dx_1 + x_1 dy_2 - y_1 dx_2 - x_2 dy_1 = 0$$

となることを使って整理すると、上式の右辺は

$$\frac{1}{q}\{(x_1^2 + x_2^2) dx_1 \wedge dy_1 + (x_1^2 + x_2^2) dx_2 \wedge dy_2\}$$

となることが分かる。$q = x_1^2 + x_2^2$であったことを思い出すと、まさにこの式は$dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$である。

以上のことから、この場合もMarsden-Weinstein theoremが成り立ち、reduceされた空間はsymplecticな性質を引き継いだsymplectic quotientとなっているということが示された。

4. 2. 2. $M = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$から$M_{\mathrm{red}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$へのreduction

次に$M = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$から$M_{\mathrm{red}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$へのreductionを考えてみよう[5][11][12]。これは、様々なところで議論されていてKustaanheimo-Stiefel変換という名前で知られているものである[13]。

まず$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$をsymplectic manifoldとし、座標を（x_i, y_i）（$i = 1, 2, 3, 4$）とする。そのときのsymplectic 2-formは$\omega = dx_i \wedge dy_i$で与えられるものとする。即ち、$x_i$が空間座標で$y_i$が運動量と考える。ところで今、（$x_i, y_i$）を以下のような行列で表現する。

$$X = x_4 + i\sigma_i x_i, \quad Y = y_4 + i\sigma_i y_i$$

そうすると、これらに対しては4次元的なG =SO(4)〜SO(3)$_{\mathrm{L}}$×SO(3)$_{\mathrm{R}}$回転群が

$$X \to L^{-1}XR,$$
$$Y \to L^{-1}YR$$
$$(L = e^{i\sigma_i L_i},\ R = e^{i\sigma_i R_i})$$

のように作用する。ただし、今ここではGの部分群$\mathrm{U}(1)_L$のみの作用に注目する。するとその微小変換は、

$$X \to e^{-i\sigma_3 \epsilon t}(x_4 + i\sigma_j x_j),$$
$$Y \to e^{-i\sigma_3 \epsilon t}(y_4 + i\sigma_j y_j)$$

となる。この変換に対するmoment mapが

$$\mu = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)$$

であることは、これまで示した方法を用いると容易に導くことができる。つぎに、このmoment mapを一定の値に固定してsymplectic quotientを作る。するとこの場合のsymplectic quotientは、２つの次元の自由度が減って$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$になる。その際、２通りのcaseに分けて考える。即ち、固定したμの値をゼロととるか、ノンゼロととるかである。

- $\mu^{-1}(0)/G$

まず$\mu = 0$とすると、この空間の座標（q_a, p_a）は、元の$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$の座標（$x_i, y_i$）と

$$Q \equiv X\sigma_3 X^\dagger = q_a\sigma_a, \quad P \equiv \frac{1}{2r}X\sigma_3 Y^\dagger = p_a\sigma_a$$

のように関係づけることができる（Appendix A参照）。成分で表すと

$$\begin{cases} q_1 = 2(x_1x_3 + x_2x_4) \\ q_2 = 2(x_1x_4 - x_2x_3) \\ q_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{1}{2r}(x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_4 + x_4y_2) \\ p_2 = \dfrac{1}{2r}(x_1y_4 + x_4y_1 - x_2y_3 - x_3y_2) \\ p_3 = \dfrac{1}{2r}(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4) \end{cases}$$

である。そして、symplectic 2-formは$\mu = 0$のもとで$dx_i \wedge dy_i = dq_a \wedge dp_a$となることが確かめられる（Appendix B 参照）。

- $\mu^{-1}(\zeta)/G$

次に$\mu = \zeta \neq 0$とする場合について考える。このとき、上のQは同じだが、Pについては少し様子が変わる。即ち

$$P = \frac{1}{2r}X\sigma_3 Y^\dagger = p_a\sigma_a + \frac{i\zeta}{r}$$

となって、moment mapの値に比例する項がお釣りとして現れる。さらに、このときのsymplectic 2-formはMarsden-Weinstein theoremより

$$dx_i \wedge dy_i = dq_a \wedge dp_a$$
$$- \frac{\zeta}{r^3}(q_1dq_2 \wedge dq_3 + q_2dq_3 \wedge dq_1 + q_3dq_1 \wedge dq_2)$$

となることが分かる（Appendix B参照）。ただし、

$$r^2 \equiv q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2$$

である。これは、2. 3節で扱ったmonopoleが原点にあるときの2-formそのものである。即ち、2. 3節では取ってつけたような2-formであったが、実はこれは$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$を$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$にsymplectic reductionしたときの、moment mapがnonzeroで得られた2-formであることが分かる。

ここで示した$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$から$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$へのreductionは、この節の初めにも述べたように通常Kustaanheimo-Stiefel変換と呼ばれているものである。

さて、ここまで取り挙げてきた例で共通して云えることがある。これらの例では、まずmoment map μを一定の値(ζ)に固定することでできる超曲面$\mu^{-1}(\zeta)$を考え、さらにそれをGで割ったquotient空間$\mu^{-1}(\zeta)/G$を考えるという流れで説明してきた。しかし、よくみてみると実際にやっていることは次のような流れとなっている。即ち、

- まずμによって生成される変換に対して不変なx_i, y_iの関数を見つける。それは形式的にはx_i, y_iと同じ数だけ作ることが出来る。
- moment map自身もmoment mapで生成される変換に対して不変なので、moment map自身もその不変量のなかのひとつとして含まれる。
- そこで、まずmoment mapの値を固定して自由度を一つ減らす。
- さらに形式的に書いた不変量のうち、初めから恒等的に０になってしまうか、moment mapを固定することによって消える自由度がもうひとつ出てくる。

といった具合である。つまり、何次元でもいいから偶数次元のsymplectic manifoldを考えて、そこに作用させる群がU(1)であれば、必ずその群による変換に対する不変量を作ることができるはずで、それをあらたな座標と運動量と見做せば、必ずsymplectic quotientを作ることができるというシナリオになっていると考えられる。

4. 2. 3. 新たなSymplectic Quotientの例

そこで、上述の予想の是非を問うために、以下のようなケースを考えてみよう。

$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$から$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$のsymplectic quotient
要するに、前節と前々節の２つの例のちょうど中間の次元を持った場合を考えてみるということだ。これは、今まで議論の対象にはならなかったケースである。しかし、もし、前節の予想が正しければ、この場合でもsymplectic quotientは作れるはずだ。phase space $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$に対して、第３軸まわりの回転群U(1)が作用するときのmoment mapを考える。まずはKS変換との対応関係を見やすくするために、fundamentalに作用するように議論を組み立てることにする。

即ち、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to e^{iJ_3\theta}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to e^{iJ_3\theta}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$$

ただし

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。また、この作用をgenerateするmoment map μは角運動量の第３成分になるはずなので、勿論$x_1y_2 - x_2y_1$である。この作用に対して不変な量は

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2 \\ 0 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1+x_2y_2 \\ -x_2y_1+x_1y_2 \\ x_3y_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

とすることができる。実際、

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} e^{-iJ_3\theta}$$
$$= \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & 0 \\ -x'_2 & x'_1 & 0 \\ 0 & 0 & x'_3 \end{pmatrix}$$

となることが容易に確かめられる。したがって、q_i, p_i は不変量であり、すべてμとのPoisson bracketは0となる。つまり、q_2は0、$p_2 = \mu$なので（q_1, q_3），（p_1, p_3）を$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$の座標とみなすことができる。

また、この話はadjointに作用するような表現で議論することができる。(このほうが、後々gauge理論にこのシナリオを適用するためには意味があるかもしれない。) 第3-軸まわりの回転群であるU(1)がphase spaceにadjointに作用するということは

$$(q_i, p_i)\sigma_i = (\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \to e^{i\theta\sigma_3}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})e^{-i\theta\sigma_3}$$

という変換を考えるということである。この変換に対して不変になる量は、例えば次のようなものが考えられる。

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i x_j\sigma_j] = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{5}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i x_j\sigma_j\sigma_3] = 0 \tag{6}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i\sigma_3 x_j\sigma_j\sigma_3] = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \tag{7}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i y_j\sigma_j] = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \tag{8}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i y_j\sigma_j\sigma_3] = i(x_1y_2 - x_2y_1) \tag{9}$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[x_i\sigma_i\sigma_3 y_j\sigma_j\sigma_3] = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 \tag{10}$$

(4) と (7) はfundamentalに作用したときのものと同じであり、(5) と (7)、(8) と (10) は (3), (4) の結果と一見異なって見えるが、和と差をとれば同じであることが分かる。したがって、(5), (7) を２次元空間の座標q_a、(8), (10) を運動量p_aと見做すことができるはずだ。

そこで、最終的にこれが正しいsymplectic quotientであるというためには、symplectic 2-formがきちんと元の空間とquotientの空間で関係づけられているかどうかを調べる必要がある。しかし、残念ながらそのまま (4) や (8), (10) を運動量として見てしまうと$dx_i \wedge dy_i = dq_a \wedge dp_a$とはならない。そこで、例えば (3), (4) の代わりに

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ 0 \\ x_3^2 \end{pmatrix} \tag{3'}$$
$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 \\ -x_2y_1 + x_1y_2 \\ 2rx_3y_3 \end{pmatrix} \tag{4'}$$

のように再定義してみる。もちろん、これもU(1)不変量である。すると$dq_1 \wedge dp_1$は、$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$から$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$へのreductionのときの$dq \wedge dp$と全く同じことになるので、$dq_1 \wedge dp_1 = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$は明らかである。一方$dq_2 \wedge dp_2$はmoment mapが定数であろうとなかろうとそのまま計算することができて、

$$dq_2 = 2x_3dx_3$$
$$dp_2 = y_3dx_3 + x_3dy_3$$

なので

$$dq_2 \wedge dp_2 = 2x_3^2 dx_3 \wedge dy_3$$

となってしまう。しかし、ここで更に$p_2 = \dfrac{y_3}{2x_3}$（即ち、x_3y_3 をx_3^2で割ったもの）と定義し直すと、

$$dq_2 = 2x_3dx_3$$
$$dp_2 = -\frac{y_3}{x_3^2}dx_3 + \frac{1}{x_3}dy_3$$

なので$dq_2 \wedge dp_2 = dx_3 \wedge dy_3$が得られる。以上のように、上手に定義すればsymplectic 2-formは一致させることができて、symplectomorphic

なreductionを得ることができる。

ただし、ここまでの議論が適用できるのは少なくとも群GがU(1)のときに限られるということに注意すべきである。一般のLie群については必ずしも成立しない。例えば全角運動量をmoment mapとする場合はG =SO(3)であるが、このときmoment mapである角運動量自体がSO(3)不変ではないことからこの節での議論は適用できないことは明らかである。その場合のsymplectic quotientを求めるためには改めて別の考察が必要になる。

4. 2. 4. Symplectic quotient の物理的意味

さて、ここまで幾つかのmanifoldについてsymplectic quotientについて議論してきたが、物理的にsymplectic quotientとはどのようなものなのかについて考えてみよう。

この点を理解するために、再び$M = \mathbb{C}^2$にG = U(1)が作用している場合について考えてみる。3. 1でも議論したように、Mの座標$(z_1, z_2)^T = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)^T$ に対してGが$z_i \to e^{i\lambda t} z_i$のように作用する場合、moment mapは$\mu = i\bar{z}_i z_i$であった。もしmoment mapを一定の値$\zeta$に固定すると$\mu^{-1}(\zeta)$は$S^3$の超曲面を表しているが、$i\bar{z}_i z_i = \zeta$という式はもともと与えられた座標 $(z_1, z_2)^T$に対する方程式のひとつとみることもできる。しかし、勿論この方程式は１つしかないので、変数４つに対する不定方程式ということになり、３つの自由度が残る。つまり、x_i, y_iを実数だとするとこの方程式の不定解は、例えば

$$x_1 = l$$

$$y_1 = m$$

$$x_2 = n$$

$$y_2 = \pm\sqrt{\zeta - l^2 - m^2 - n^2}$$

($l, m, n : l^2 + m^2 + n^2 \leqq \zeta$を満たす任意の定数）のようになり、$l, m, n$は３次元球の内側の自由度がある。つまり、この$l, m, n$の自由度がmoment mapの解の自由度で、任意のl, m, nに対して同じmoment mapの値を与える。さらに、moment map μを含め、reductionされた座標はG = U(1)の変換に対して区別がつかない自由度である。するとU(1)= S^1 であることから更にもう一つ自由度を減らして考える必要があり、本当の自由度は２つとなることがわかる。もともと与えられた不定方程式$\mu = \zeta$により全体としてはS^3の自由度なので、symplectic quotientは$S^3 / S^1 \cong S^2$ であることがわかるのであった。これは物理的に言えば、moment map= ζの解を与えるmoduliの自由度という見方ができる。このことは、別の機会で議論する場の理論におけるmoment mapのときに重要な意味を持つものと考えることが出来る。

4. 2. 5. Kepler問題のHamiltonianについて

ところで、$M = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ から$M_{\text{red}} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ へのreductionではもうひとつ興味深い話題がある。それはKepler問題のHamiltonianについてである。前にも示したように、３次元のharmonic oscillatorのHamiltonianはmoment mapのひとつである。４次元であってもそれは同様である。ところが、３次元のKepler問題のHamiltonianについては、それをmoment mapとして導き出すような$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$に作用するcompact Lie群が見当たらない。つまり、Kepler問題のHamiltonianはmoment mapとはみなせないということだ。これはどういうことなのか。この疑問の答と考えることが出来るかもしれないひとつの可能性について議論する。

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$でKepler問題のHamiltonianは

$$H = \sum_{a=1}^{3} p_a^2 + \frac{1}{r}, \quad \left(r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}\right)$$

で与えられる。もし今見えている$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$空

間が$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$からreduceされた空間だと考えると、このHamiltonianがもとの$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ではどう見えるだろうか。$\mu = 0$と仮定すると

$$\begin{aligned}\sum_a p_a^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\sum_a (p_a\sigma_a)^2 \\ &= \frac{1}{8r^2} Y\sigma_3 X^\dagger X\sigma_3 Y^\dagger \\ &= \frac{1}{2r}\mathrm{tr}(YY^\dagger) = \frac{1}{2r}\sum_{i=1}^{4} y_i^2\end{aligned}$$

となるので

$$H = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\sum_i^4 y_i^2 + 1\right)$$

となる。ここで、

$$\frac{dt}{d\tau} = 2r$$

というfictitious time τを導入する。すると、その場合のHamiltonian $\mathcal{H}$は

$$\mathcal{H} = 2r(H - E)$$

と書くことができる（Appendix C 参照）。そうだとすると、

$$\mathcal{H} = \sum_i^4 y_i^2 - 2E\sum_i^4 x_i^2 + 2,$$

即ち、$E < 0$ であったとすると、これは4次元的なharmonic oscillatorのHamiltonianになっていることが分かる。言い換えれば、4次元のharmonic oscillatorのHamiltonianは3次元ではboundされたKepler問題のHamiltonianになっていることを示している。つまり、ここで見たことは、3次元空間ではKepler問題のHamiltonianはmoment mapとは言えないように見えるが、次元を一つ上げて見てみるとmoment mapと見ることができるという可能性を示唆しているとみることはできないだろうか。

5．Runge-Lenz Vector とMoment Map

Kepler問題の力学系にはHamiltonianや角運動量のような保存量とは別に、Runge-Lenz（RL）vectorという保存量が存在する。RL vectorはharmonic oscillatorの力学系には現れない保存量であり、その意味においては、そのままphase spaceの幾何学に関係するようなものではなく、dynamicsの形に依存する保存量である。その意味では、それが幾何学的な意味を持つmoment mapとは無関係な量かもしれない。したがって、本来本稿で扱う対象ではないかも知れないが、保存量としては興味深いものであり、直前で見たように一見moment mapではないはずのKepler問題のHamiltonianが、実はもしかすると空間を広げてみるとmoment mapであると見ることができるかもしれないという事実もあるので、ここで紹介することは無意味とは言い切れない。また、結局moment mapではなかったとしても、保存量＝ moment mapではないという典型的な例（もしくは無限小正準変換のgeneratorにはなり得るがmoment mapとは見做せない例）として紹介しておくという意味でも重要であると考えられる。

5．1．Runge-Lenz Vector の導出

5. 1. 1. Kepler問題におけるRunge-Lentz（RL）vector の導出

まず、どのようにRL vectorが導かれるかを示して置く。

Kepler問題の力学系において運動方程式は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}$$

と表される。この両辺の左から$\boldsymbol{r}$の外積をとると、右辺は$\boldsymbol{r}$なのでゼロとなり

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = 0$$

が得られる。ところで、

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{11}$$

なので、角運動量を$\boldsymbol{L}\equiv\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$とすると

$$\dot{\boldsymbol{L}}=0$$

となることが分かり、まず角運動量保存則が得られる。

次に、上の運動方程式に、今度は右から$\boldsymbol{L}$の外積をとると

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{L}&=\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\\&=-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})+\dot{\boldsymbol{r}}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{r}})+\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

であるから運動方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}\\&=-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

と書き換えられる。また、右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}\\&=\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r}-r^2\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3}\\&=-\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned}$$

より

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}=-k\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と書き換えることができる。よって、すべて左辺に移項してみると

$$\frac{d}{dt}\left\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})+k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right\}=0$$

となり、括弧の中身が時間的に不変であること、即ち保存量であることが分かる。この括弧の中身が所謂RL vectorである。

5. 1. 2. MIC Kepler問題におけるRunge-Lentz（RL）vectorの導出

RL vectorは、MIC Kepler問題の力学系でも保存量となることが示される。この場合の運動方程式は[14]

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mu}{r^3}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}+\frac{\mu^2}{r^4}\boldsymbol{r}$$

で表される。再び両辺の左から$\boldsymbol{r}$の外積をとると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}} \qquad (12)\\&=-\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r})\\&=\frac{\mu}{r^3}\left\{(\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-r^2\dot{\boldsymbol{r}}\right\}=-\mu\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\end{aligned}$$

となり、（11）を用いると左辺は

$$\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{13}$$

なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}+\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0 \tag{14}$$

となる。ここで、新たに括弧の中を$\boldsymbol{J}$としてこれを角運動量と考える。

次に、運動方程式の両辺に右から$\boldsymbol{L}$の外積をとる。

$$\begin{aligned}&\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}) \qquad (15)\\&=-\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})+\frac{\mu^2}{r^4}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})+\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

より

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\\
&=\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}-\dot{\boldsymbol{r}}\times(\boldsymbol{r}\times\ddot{\boldsymbol{r}})\\
&=\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J}-\dot{\boldsymbol{r}}\times\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+\dot{\boldsymbol{r}}\times\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\
&=\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J})-\mu\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+\mu\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\
&=\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J})-\mu\ddot{\boldsymbol{r}}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\\
&-\mu\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)+\mu\dot{\boldsymbol{r}}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\
&=\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J})-\mu\ddot{\boldsymbol{r}}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\\
&=\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J})-\frac{\mu^2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、最後の式は（12）を利用した。この結果を（15）に代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J})-\frac{\mu^2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\
&=\left(-\frac{k}{r^3}+\frac{\mu^2}{r^4}\right)\{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\}\\
&=\left(-k+\frac{\mu^2}{r}\right)\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})}{r^3}\\
&=-\left(-k+\frac{\mu^2}{r}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)
\end{aligned}
$$

となって左辺２項目と右辺２項目が消えて

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{J}-k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$$

となる。角運動量が$\boldsymbol{L}$から$\boldsymbol{J}$に代わっただけで、これもRL vectorであると解釈することができ、保存量である。

5．2．Runge-Lenz vector の役割

5. 2. 1. 円錐曲線軌道

RL vectorは、位置ベクトルとの内積をとって、位置ベクトル$\boldsymbol{r}$についての代数方程式を作るとその解がそのままKepler問題における円錐曲線軌道を与えることが知られている。

Runge-Lenz vectorを

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}-\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と表すことにする。この両辺について位置ベクトル$\boldsymbol{r}$との内積を取ると、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}\\
&=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})\cdot\boldsymbol{r}-r\\
&=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{L}-r\\
&=\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}-r\\
&=l^2-r
\end{aligned}
$$

ここで角運動量は保存量であると考えており$l=$一定とする。ところで上式の左辺は

$$|A|r\cos\theta=Ar\cos\theta$$

なので、

$$r(A\cos\theta+1)=l^2$$

となり

$$r=\frac{l^2}{1+A\cos\theta}$$

となることが分かる。これは、もしRL vectorの大きさAが一定であれば円錐曲線の極方程式を表していることがわかる。言い換えれば、RL vectorが保存するsystemでは、質点が描く曲線は円錐曲線に限られていることが分かる。また、さらに言い換えればRL vectorという保存量を見つけてしまえば、もはや運動方程式を解くことなくKepler問題の軌道解を得ることができるということを意味している。

5. 2. 2. $\mathfrak{so}(3)_L\times\mathfrak{so}(3)_R\sim\mathfrak{so}(4)$のgenerator

もし質点が楕円軌道を描いているとすると、即ち、Kepler問題における力学的エネルギーEが$E<0$を満たしているとすると、RL vectorを適当にnormalizeすることにより、角運動量L_iとRunge-Lenz vector A_iは

$$
\begin{aligned}
\{L_i,L_j\}&=\epsilon_{ijk}L_k\\
\{L_i,A_j\}&=\epsilon_{ijk}A_k\\
\{A_i,A_j\}&=\epsilon_{ijk}L_k
\end{aligned}
$$

という構造を持つ。即ち、RL vectorはmoment mapである角運動量とペアを組ん

で$\mathfrak{so}(3)_\mathrm{L}\times\mathfrak{so}(3)_\mathrm{R}\sim\mathfrak{so}(4)$の代数を満たすgeneratorになっていることが分かっている。

5．3．RL vector とmoment map

RL vectorは無限小正準変換のgeneratorとはなり得るが、そもそもmoment mapはphase spaceの幾何学的な構造から現れる量であるべきなので、Keplerという特別な力学系でのみ保存量となっているRL vectorがmoment mapのひとつであるとは到底考えられない。そこで、もう一度moment mapの定義に照らし合わせてRL vectorを見直してみる。

RL vectorがmoment map μ_i かどうかは、moment mapの定義から

$$d\mu_i=\omega(X_i,\ \cdot)$$

を満たすことが条件であった。今、μ_iの形は決まっているわけだから、そのμ_i、即ちRL vectorを使って左辺を書いたときに、右辺を満たすようなtangent vector fields X_iが存在するかどうかで決まる。一般的にX_iは

$$X_i=A_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}+B_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}$$

という形で表され、symplectic 2-form $\omega=dq_l\wedge dp_l$を使って$\omega(X_i,\cdot)$を作ると、

$$\omega(X_i,\cdot)=dq_l\wedge dp_l\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}+B_{ij}\frac{\partial}{\partial p_j}\right) \quad (16)$$
$$=B_{ij}dq_j-A_{ij}dp_j$$

なので、これが$\mathrm{d}\mu_i$と一致することになるはずである。ここまでは角運動量の議論と全く同じである。

具体的にRL vectorで$\mathrm{d}\mu_i$を計算すると、そもそもRL vector Aiは

$$A_i=\left\{\boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{p})-k\frac{\boldsymbol{q}}{|\boldsymbol{q}|}\right\}_i$$
$$=(q_i\boldsymbol{p}^2-p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q})-k\frac{q_i}{|\boldsymbol{q}|}$$

と表されるので、$\mu_i=A_i$であるから

$$d\mu_i=\left\{\left(\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2-p_ip_j\right)-\frac{k}{|\boldsymbol{q}|}\left(\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j\right)\right\}dq_j \quad (17)$$
$$+(2q_ip_j-q_jp_i-\delta_{ij}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})dp_j$$

と表される。一方で$\mathrm{d}\mu_i=\omega(X_i,\cdot)$となるはずだから、(16)式と(17)式を比較すれば

$$A_{ij}=-(2q_ip_j-q_jp_i-\delta_{ij}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})$$
$$B_{ij}=\left(\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2-p_ip_j\right)-\frac{k}{|\boldsymbol{q}|}\left(\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j\right)$$

でなければならない。

次に、phase space上をどのように時間発展させれば、上のA_{ij},B_{ij}が出てくるのだろうか。つまり$x_\mu=(q_i,p_i)$に対してどのように群が作用すれば上のようなA_{ij},B_{ij}が出てくるのだろうかを考える必要がある。

要するに、群の作用による時間発展をsymbolicに$x_\mu(t)=e^{\Lambda t}\cdot x_\mu=e^{\Lambda t}\ (q_i,p_i)$と書いたときに

$$\left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0}$$
$$=\lambda_i\Big(-(2q_ip_j-q_jp_i-\delta_{ij}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}),$$
$$\left(\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2-p_ip_j\right)-\frac{k}{|\boldsymbol{q}|}\left(\delta_{ij}-\hat{q}_i\hat{q}_j\right)\Big)$$

となるような$e^{\Lambda t}$を見つけなければならない。しかし、今のところこの問いに関する答えは見つかっていない。これはRL vectorがmoment mapではないことを意味しているのかもしれない。そもそも、これまで見つかっているmoment mapはmonopoleが関係している系を除けばq_iとp_iについて双対的（つまり、q_iとp_iの入れ替えについて対称的）である。これはsymplectic 2-formがq_iとp_iについて双対的なので、そこから導かれるものがそのような性質を持っているのは当然のように思われる。しかし、RL vectorに関してはそうなっていない。その意味でもRL vectorがmoment mapではないのかも知れない。とは言え、moment mapである角運動量とペアを

組んでSO(4)の代数を組むこと、RL vectorがあって初めてKepler問題では円錐曲線軌道が決まることから、moment mapとはなんらかの関係があるであろうことは間違いないように思われる。これは非常に興味深いテーマではあるが、今のところこのような観点からの研究は見当たらず、解決の糸口は見つかっていない。

6．まとめ

以上ここまで古典力学系におけるmoment mapに関わる話題を物理学の立場から整理し、まとめてみた。冒頭でも述べたように、moment mapという概念は物理学的にはあまり注目されてこなかった。それは、本稿からも明らかなように、moment map自体がほとんど物理学の中では既によく知られている保存量であり、理解されつくしていると考えられている量なので、今さら別の見方をして取り上げて話題にするほどのことはないということだと考えられる。しかし、moment mapという概念にはdynamicsは直接関係がなく、phase spaceの幾何学的な性質だけから導き出されているということが重要

である。つまり、dynamics を具体的に与えてからその系では何が保存量なのかを考えるのではなく、phase spaceの幾何学的な形から直接与えられる量だということである。そこにはphase spaceとdynamicsの間に何か深遠な意味があるように思われる。

また、このレポートで議論した内容のなかにsymplectic quotientという概念が存在する。これは今まで物理的には注目されてこなかった概念だが、これも実は物理的に重要な意味を持つ可能性がある。本稿で示した具体的なsymplectic quotientの例は、主に作用する群がU(1)であったが、その場合symplectic quotientはphase spaceとしては２次元、実空間でみれば１次元、次元が低くなった空間であることが分かった。特に$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$から$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$に次元が下がる場合について考察すると、次元の低い空間ではKeplerのdynamicsが次元の高いところで見るとHarmonic oscillatorのdynamics に見える可能性が示されている。harmonic oscillatorのHamiltonianはmoment mapと見ることが出来るが、Kepler問題のHamiltonianはmoment mapではない。この２つの量がsymplectic reductionで結びついている可能性があるわけである。これは物理的に非常に興味深い事実である。

また、直接moment mapとは関係ないが、Runge-Lenz（RL）vectorについても考察した。RL vectorそのものはmoment mapと考えにくい量であるが、Kepler問題においては物体が楕円運動をする際にはmoment mapである角運動量と組み合わせるとSO(4)のgeneratorになることが分かった。上で述べたKepler系は次元の高い空間でみるとharmonic oscillator系とみることが出来るという事実と組み合わせて考えるとRL vectorもmoment mapと全く無関係ではないかも知れないということが期待できる。この点についてはまだ結論が出ていないが研究を進める価値があるものと思われる。

ところで、ここまで古典力学系のsymplecticなphase spaceと、そこに現れるmoment mapについて議論してきたが、この考察をgauge場のconfiguration space に適用することができるということが知られており、そこでは更に興味深い事実が認められることが知られている。その点については改めて別の機会に紹介したい。

Appendix A

ここでは$M = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$が$M_{red} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$にsymplectic reductionされたのときのM_{red}での運動量が、もとのMでの座標でどのように表

されるか具体的に計算する[11]。

$$\boldsymbol{q} = iq_a\sigma_a$$
$$\boldsymbol{p} = ip_a\sigma_a$$

$$X = x_4 + ix_i\sigma_i$$
$$Y = y_4 + iy_i\sigma_i$$

とする。まず、$\boldsymbol{q}$については

$$\boldsymbol{q} = X^\dagger i\sigma_3 X$$

と定義する。そのとき、$\boldsymbol{p}$はどうあるべきかである。

$\omega = d\theta$とすると

$$\begin{aligned}\theta &= p_a dq_a = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{p}^\dagger d\boldsymbol{q}\right]\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{p}^\dagger dX^\dagger i\sigma_3 X\right] + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{p}^\dagger X^\dagger i\sigma_3 dX\right]\end{aligned}$$

ここで、一般に$A = a_4 + ia_i\sigma_i, B = b_4 + ib_i\sigma_i$とすると$\mathrm{tr}[A] = \mathrm{tr}[A^\dagger]$; $\mathrm{tr}[AB] = \mathrm{tr}[B^\dagger A^\dagger] = \mathrm{tr}[BA]$であり、$\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{p}^\dagger$であることから

$$\theta = \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{p}^\dagger X^\dagger i\sigma_3 dX\right]$$

と書くことができる。これを見ると、

$$Y = -2i\sigma_3 X\boldsymbol{p} \tag{A1}$$

とすれば

$$\begin{aligned}\theta &= p_a dq_a\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{p}^\dagger d\boldsymbol{q}\right]\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[Y^\dagger dX\right]\\ &= x_i dy_i\end{aligned}$$

と考えることができる。即ち$dq_a \wedge dp_a = dx_i \wedge dy_i$となる。（A1）を逆に解くと

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{2r}X^\dagger i\sigma_3 Y$$

と表されることがわかる。ただし、ここで注意すべきは、最後の結果から明らかなように、$X^\dagger i\sigma_3 Y$がtraceless，即ちmoment map

$$\mu = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3) = 0$$

である場合にのみ成立するということである。$\mu \neq 0$のときは、とりあえずAppendix Bで別途考える。

Appendix B

$M = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$のsymplectic 2-formと、そのsymplectic quotientである$M_{red} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$のsymplectic 2-formが一致することを具体的な計算で確かめてみる[15]。再び$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$の座標を（$x_i, y_i$）、$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$の座標を（$q_a, p_a$）とする。moment map μの値が一定のもとで座標の関係は、前述のように

$$\begin{aligned}q_1 &= 2(x_1x_3 + x_2x_4),\\ q_2 &= 2(x_2x_3 - x_1x_4),\\ q_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\\ p_1 &= \frac{1}{2r}(x_3y_1 + x_4y_2 + x_1y_3 + x_2y_4)\\ p_2 &= \frac{1}{2r}(x_4y_1 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_4)\\ p_3 &= \frac{1}{2r}(x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4)\end{aligned} \tag{B1}$$

で関係づけられており、moment mapは

$$\mu = \frac{1}{2}(-x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 + x_3y_4)$$

であった。ここで次のようなvector $\boldsymbol{s}$を定義する。

$$s_0 = 2\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ -x_4\\ x_3\end{pmatrix},\quad s_1 = 2\begin{pmatrix}x_3\\ x_4\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix},$$

$$s_2 = 2\begin{pmatrix}-x_4\\ x_3\\ x_2\\ -x_1\end{pmatrix},\quad s_3 = 2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ -x_3\\ -x_4\end{pmatrix}$$

すると、$\langle s_i, s_j\rangle = 4r\delta_{ij}$ であり、それぞれは直交していることがわかる。この性質を使うと

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{r}s_0 + \sum_a p_a s_a \qquad \text{(B2)}$$

と書くことができる。次に（B1）から

$$\begin{aligned} dq_1 &= \sum_\mu \frac{\partial q_1}{\partial x_\mu}dx_\mu \\ &= 2x_3dx_1 + 2x_4dx_2 + 2x_1dx_3 + 2x_2dx_4 \\ &= \langle s_1, dx\rangle \\ dq_2 &= \sum_\mu \frac{\partial q_2}{\partial x_\mu}dx_\mu \\ &= -2x_4dx_1+2x_3dx_2+2x_2dx_3-2x_1dx_4 \\ &= \langle s_2, dx\rangle \\ dq_3 &= \sum_\mu \frac{\partial q_3}{\partial x_\mu}dx_\mu \\ &= 2x_1dx_1 + 2x_2dx_2 - 2x_3dx_3 - 2x_4dx_4 \\ &= \langle s_3, dx\rangle \end{aligned}$$

であることがわかる。また、μが定数であるとすると（B2）からは、

$$dy = \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ dy_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2\mu}{r^2}\langle x, dx\rangle s_0 + \frac{\mu}{r}ds_0 \\ &\quad + s_1dp_1 + s_2dp_2 + s_3dp_3 \qquad \text{(B3)} \\ &\quad + p_1ds_1 + p_2ds_2 + p_3ds_3 \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、

$$ds_0 = 2\begin{pmatrix} -dx_2 \\ dx_1 \\ -dx_4 \\ dx_3 \end{pmatrix}, \ ds_1 = 2\begin{pmatrix} dx_3 \\ dx_4 \\ dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix},$$

$$ds_2 = 2\begin{pmatrix} -dx_4 \\ dx_3 \\ dx_2 \\ -dx_1 \end{pmatrix}, \ ds_3 = 2\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ -dx_3 \\ -dx_4 \end{pmatrix}$$

である。例えば、添え字をつけない2-formを

$$\begin{aligned} &dx \wedge dy \\ &= dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 \\ &\quad + dx_3 \wedge dy_3 + dx_4 \wedge dy_4 \end{aligned}$$

のように定義すると、

$$\begin{aligned} &dx \wedge ds_0 \\ &= -dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_1 \\ &\quad - dx_3 \wedge dx_4 + dx_4 \wedge dx_3 \qquad \text{(B4)} \\ &= -2(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \end{aligned}$$

となることがわかる。さらに、同様の計算より

$$dx \wedge ds_1 = dx \wedge ds_2 = dx \wedge ds_3 = 0$$

が得られる。したがって（B3）を用いて$dx \wedge dy$を表したとき、

$$p_1dx \wedge ds_1 + p_2dx \wedge ds_2 + p_3dx \wedge ds_3$$

の項は消える。さらに

$$\begin{aligned} &dx \wedge dp_1s_1 \\ &= \langle dx, s_1\rangle \wedge dp_1 \\ &= (2x_3dx_1+2x_4dx_2+2x_1dx_3+2x_2dx_4)\wedge dp_1 \\ &= dq_1 \wedge dp_1 \end{aligned}$$

$$dx \wedge dp_2 s_2$$
$$= \langle dx, s_2 \rangle \wedge dp_2$$
$$= (-2x_4 dx_1 + 2x_3 dx_2 + 2x_2 dx_3 - 2x_1 dx_4) \wedge dp_1$$
$$= dq_2 \wedge dp_2$$

$$dx \wedge dp_3 s_3$$
$$= \langle dx, s_3 \rangle \wedge dp_3$$
$$= (2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 - 2x_3 dx_3 - 2x_4 dx_4) \wedge dp_3$$
$$= dq_3 \wedge dp_3$$

となることから$dx \wedge dy$のうち、μに比例しない項は$d_q \wedge d_p$であることが分かる。即ち、これにより$\mu = 0$ のとき、まさに$dx \wedge dy = dq \wedge dp$ であることが示される。

また、(B3) をみるとμに比例しているお釣りの項は、$dx_i \wedge dx_j$ のような項の集まりであることが分かるので、この時点でこれらからは$dq_a \wedge dq_b$ に係る項だけが出てくるという予想がつく。しかし、具体的にどのような形になるかは、結局case by caseで地道に計算しなければいけないようだ。そこでまず、dxと (B3) の第１項、第２項のwedge productを計算すると

$$dx \wedge \left(-\frac{2\mu}{r^2} \langle x, dx \rangle s_0 \right)$$
$$= -\frac{2\mu}{r^2} \langle dx, \wedge (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4) s_0 \rangle$$
$$\begin{aligned} = -\frac{2\mu}{r^2} \big(& -x_2^2 dx_1 \wedge dx_2 \\ & - x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3 - x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_4 \\ & + x_1^2 dx_2 \wedge dx_1 \\ & + x_1 x_3 dx_2 \wedge dx_3 + x_1 x_4 dx_2 \wedge dx_4 \\ & - x_1 x_4 dx_3 \wedge dx_1 - x_2 x_4 dx_3 \wedge dx_2 \\ & - x_4^2 dx_3 \wedge dx_4 \\ & + x_1 x_3 dx_4 \wedge dx_1 + x_2 x_3 dx_4 \wedge dx_2 \\ & + x_3^2 dx_4 \wedge dx_3 \big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{2\mu}{r^2} \big\{ & (x_1^2 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_2 + (x_3^2 + x_4^2) dx_3 \wedge dx_4 \\ & + (x_2 x_3 - x_1 x_4)(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \\ & + (x_1 x_3 + x_2 x_4)(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3) \big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx \wedge \left(\frac{\mu}{r} ds_0 \right) & \\ = & -\frac{2\mu}{r}(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ = & -\frac{2\mu}{r^2} \big\{ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_1 \wedge dx_2 \\ & + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) dx_3 \wedge dx_4 \big\} \end{aligned}$$

となる。よって

$$dx \wedge \left(-\frac{2\mu}{r^2} \langle x, dx \rangle s_0 + \frac{\mu}{r} ds_0 \right) \tag{B5}$$
$$\begin{aligned} = \frac{2\mu}{r^2} \big\{ & -(x_3^2 + x_4^2) dx_1 \wedge dx_2 - (x_1^2 + x_2^2) dx_3 \wedge dx_4 \\ & + (x_2 x_3 - x_1 x_4)(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4) \\ & + (x_1 x_3 + x_2 x_4)(dx_1 \wedge dx_4 - dx_2 \wedge dx_3) \big\} \end{aligned}$$

である。一方、$dq_a \wedge dp_b$ の項をdx_i で表すと

$$dq_2 \wedge dq_3$$
$$\begin{aligned} = 4 \big\{ & -(x_1 x_3 + x_2 x_4)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ & + (x_1 x_2 - x_3 x_4)(dx_2 \wedge dx_4 - dx_1 \wedge dx_3) \\ & + (x_4^2 + x_1^2) dx_1 \wedge dx_4 - (x_2^2 + x_3^2) dx_2 \wedge dx_3 \big\} \end{aligned}$$

$$dq_3 \wedge dq_1$$
$$\begin{aligned} = 4 \big\{ & (x_1 x_4 - x_2 x_3)(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ & + (x_1 x_2 + x_3 x_4)(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3) \\ & + (x_1^2 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_3 + (x_2^2 + x_4^2) dx_2 \wedge dx_4 \big\} \end{aligned}$$

$$dq_1 \wedge dq_2$$
$$\begin{aligned} = 4 \big\{ & (x_3^2 + x_4^2) dx_1 \wedge dx_2 - (x_1^2 + x_2^2) dx_3 \wedge dx_4 \\ & + (x_2 x_3 + x_1 x_4)(dx_1 \wedge dx_3 - dx_2 \wedge dx_4) \\ & + (-x_1 x_3 + x_2 x_4)(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3) \big\} \end{aligned}$$

となることが分かるので、この結果を用いて$q_1 dq_2 \wedge dq_3 + q_2 dq_3 \wedge dq_1 + q_3 dq_1 \wedge dq_2$の中にある$dx_i \wedge dx_j$各項を整理してみると

1. $dx_1 \wedge dx_2$ に比例する項

$$\left\{-2q_1^2-2q_2^2+2q_3(r-q_3)\right\}dx_1\wedge dx_2$$
$$=-2r(r-q_3)dx_1\wedge dx_2$$
$$=-4r(x_3^2+x_4^2)dx_1\wedge dx_2$$

2. $dx_1 \wedge dx_3$ に比例する項

$$4\Big\{(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)(x_1x_4+x_2x_3)$$
$$+2(x_1x_3+x_2x_4)(x_4x_3-x_1x_2)$$
$$+2(x_2x_3-x_1x_4)(x_1^2+x_3^2)\Big\}dx_1\wedge dx_3$$
$$=4r(x_2x_3-x_1x_4)dx_1\wedge dx_3$$
$$=2rq_2dx_1\wedge dx_3$$

3. $dx_1 \wedge dx_4$ に比例する項

$$2rq_1dx_1\wedge dx_4$$

4. $dx_2 \wedge dx_3$ に比例する項

$$-2rq_1dx_2\wedge dx_3$$

5. $dx_2 \wedge dx_4$ に比例する項

$$2rq_2dx_2\wedge dx_4$$

6. $dx_3 \wedge dx_4$ に比例する項

$$-2r(r+q_3)dx_3\wedge dx_4$$
$$=-4r(x_1^2+x_2^2)dx_3\wedge dx_4$$

ということになる。結局、これらを寄せ集めると

$$\frac{\mu}{r^3}\left(q_1dq_2\wedge dq_3+q_2dq_3\wedge dq_1+q_3dq_1\wedge dq_2\right)$$
$$=\frac{2\mu}{r^2}\left\{-(x_3^2+x_4^2)dx_1\wedge dx_2\right.$$
$$-(x_1^2+x_2^2)dx_3\wedge dx_4$$
$$+(x_1x_3+x_2x_4)(dx_1\wedge dx_4-dx_2\wedge dx_3)$$
$$\left.+(x_2x_3-x_1x_4)(dx_1\wedge dx_3+dx_2\wedge dx_4)\right\}$$

であることが分かる。これは、ちょうど（A5）そのものである。即ち、$dx\wedge dy$のなかのμに比する項が

$$\frac{\mu}{r^3}\left(q_1dq_2\wedge dq_3+q_2dq_3\wedge dq_1+q_3dq_1\wedge dq_2\right)$$

に一致しているということが分かる。よって、$\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$に作用するU(1)のmoment map μ値をζに固定したときの$\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$へのsymplectic reductionによって得られたsymplectic 2-formは

$$\omega=dq_a\wedge dp_a$$
$$-\frac{\zeta}{r^3}\left(q_1dq_2\wedge dq_3+q_2dq_3\wedge dq_1+q_3dq_1\wedge dq_2\right)$$

となることがわかる。

Appendix C

本来の時間tで表現されたHamiltonian Hとfictitious time τを使って表現されたHamiltonian $\mathcal{H}$との関係を求める[11]。まず、本来の時間変数tとfictitiousな時間変数τとの関係を

$$dt=f(q)d\tau$$

で表すことにする。ただし、qは空間座標であり、本来はfはtにも依存できるが、今は空間依存の場合を考える。すると、本来のactionは

$$S=\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau f(q)L(q,\dot{q})$$

と書くことができる。このactionに対して変分をとる。その際、気をつける点はtも変分を受け

$$q(\tau)\mapsto q(\tau)+\delta q(\tau)$$
$$t(\tau)\mapsto t(\tau)+\delta t(\tau)$$

とすることである。また、当然

$$\delta q(\tau_1)=\delta t(\tau_2)=0$$

とする。すると、まず$\dfrac{d\tau}{dt}$について変分を取ってみると

$$
\begin{aligned}
\frac{d\tau}{dt} &\mapsto \frac{d\tau}{d(t+\delta t)} \\
&= \frac{1}{\dfrac{dt}{d\tau}+\dfrac{d\delta t}{d\tau}} \\
&= \frac{d\tau}{dt}\left(1-\frac{d\tau}{dt}\frac{d\delta t}{d\tau}\right)
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\delta\frac{d\tau}{dt} = -\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\frac{d\delta t}{d\tau}
$$

であることが分かる。次に$\delta\dot{q}$については

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{q} &= \delta\left(\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right) \\
&= \delta\left(\frac{dq}{d\tau}\right)\cdot\frac{d\tau}{dt}+\frac{dq}{d\tau}\cdot\delta\left(\frac{d\tau}{dt}\right) \\
&= \frac{d\delta q}{dt}-\dot{q}\frac{d\tau}{dt}\frac{d\delta t}{d\tau}
\end{aligned}
$$

となる。これらの結果を用いてδSを求めてみると

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int d\tau\left[\delta\left(\frac{dt}{d\tau}\right)L+\frac{dt}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)\right] \\
&= \int d\tau\frac{d\delta t}{d\tau}\left(L-\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \\
&\quad +\int dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d\delta q}{dt}\right) \\
&= -\int d\tau\frac{d\delta t}{d\tau}H+\int dt\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q
\end{aligned}
$$

と表されることがわかる。ここでHは標準的なtによるHamiltonian

$$
H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L
$$

である。したがって、$H=0$であればこのactionの変分から、標準的なLagrange方程式が得られることがわかる。一般的にこのまま$H=0$とすることはできないが、以下のような操作でそれを実現できる。即ち、Lを$L+E$に置き換えるとLagrange方程式に変更はない。そこで、もともとのLagrangian Lを$L+E$（EはHamiltonianの値）に置き換えてみる。この置き換えを行っても、単に定数項を付け加えただけなのでLagrange方程式に変更はない。しかし、Hは$p\dot{q}-L$なので、$H-E=0$となる。

$$
\mathcal{L} = \frac{dt}{d\tau}(L+E) = f(q)(L+E)
$$

$q' = f(q)\dot{q}$なので

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'} = f(q)\frac{d\dot{q}}{dq'}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}}
$$

$$
\mathcal{H} = q'\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'}-\mathcal{L} = f(q)(H-E)
$$

Appendix D

RL vectorのPoisson bracketがSO(4)のalgebraを満たすことを確かめる[9]。

まず、Poisson bracketの性質として以下の性質を頻繁に利用するので、記しておく。

$$
\begin{aligned}
&\{A,BC\} \\
=&\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial(BC)}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial(BC)}{\partial q_i} \\
=&\frac{\partial A}{\partial q_i}\left(\frac{\partial B}{\partial p_i}C+B\frac{\partial C}{\partial p_i}\right) \\
&-\frac{\partial A}{\partial p_i}\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}C+B\frac{\partial C}{\partial q_i}\right) \\
=&\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)C \\
&+B\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial C}{\partial p_i}-\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial C}{\partial q_i}\right) \\
=&\{A,B\}C+B\{A,C\}
\end{aligned}
$$

上の性質を利用して、RL vector A_iが$\{A_i,A_j\}=-2\mu b^2\epsilon_{jkl}L_lH$を満たすことを示す。

まずRL vectorは

$$
A_i = b(q_i\boldsymbol{p}^2-p_i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p})-\frac{q_i}{r}
$$

とすることができる。ただし、bは定数である。するとRL vector同士のPoisson bracketは

$$\{A_i, A_j\}$$
$$= \left\{ b(q_i\boldsymbol{p}^2 - p_i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}) - \frac{q_i}{r}, \right.$$
$$\left. b(q_j\boldsymbol{p}^2 - p_j\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{p}) - \frac{q_j}{r} \right\}$$
$$= b^2\{q_i\boldsymbol{p}^2, q_j\boldsymbol{p}^2\} - b^2\{q_i\boldsymbol{p}^2, p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$- b^2\{p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, q_j\boldsymbol{p}^2\} + b^2\{p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$- b\left\{q_i\boldsymbol{p}^2 - p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, \frac{q_j}{r}\right\}$$
$$- b\left\{\frac{q_i}{r}, q_j\boldsymbol{p}^2 - p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\right\}$$

となる。右辺のそれぞれの項のPoisson bracketを一つずつ抜き取って計算してみると以下のようになる。

1．第1項

$$\{q_i\boldsymbol{p}^2, q_j\boldsymbol{p}^2\} = \{q_i\boldsymbol{p}^2, q_j\}\boldsymbol{p}^2 + \{q_i\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}^2\}q_j$$
$$= q_i\boldsymbol{p}^2\{\boldsymbol{p}^2, q_j\} + q_j\boldsymbol{p}^2\{q_i, \boldsymbol{p}^2\}$$
$$= -q_i\boldsymbol{p}^2 \cdot 2p_l\delta_{jl} + q_j\boldsymbol{p}^2 \cdot 2\delta_{il}p_l$$
$$= 2\boldsymbol{p}^2(-q_ip_j + q_jp_i)$$

2．第2項

$$\{q_j\boldsymbol{p}^2, p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$=\{q_i\boldsymbol{p}^2, p_j\}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \{q_i\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}p_j$$
$$=\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) + q_i\{\boldsymbol{p}^2, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}p_j$$
$$+ \boldsymbol{p}^2\{q_i, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}p_j$$
$$=\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) - 2q_i\boldsymbol{p}^2p_j + p_j\boldsymbol{p}^2\delta_{il}q_l$$
$$=\delta_{ij}\boldsymbol{p}^2(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}) - 2q_ip_j\boldsymbol{p}^2 + q_ip_j\boldsymbol{p}^2$$
$$=(\delta_{ij}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} - q_ip_j)\boldsymbol{p}^2$$

3．第3項

$$\{p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, q_j\boldsymbol{p}^2\}$$
$$= -\{q_j\boldsymbol{p}^2, p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$= -(\delta_{ij}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} - q_jp_i)\boldsymbol{p}^2$$

4．第4項

$$\{q_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$= \{p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, p_j\}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \{p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}p_j$$
$$= p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, p_j\} + p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\{p_i, \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\}$$
$$= p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}p_l\delta_{jl} + p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}(-\delta_{il}p_i)$$
$$= 0$$

5．第5項

$$\left\{q_i\boldsymbol{p}^2 - p_i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, \frac{q_j}{r}\right\}$$
$$=q_i\left\{\boldsymbol{p}^2, \frac{q_j}{r}\right\} - p_i\left\{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}, \frac{q_j}{r}\right\}$$
$$-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\left\{p_i, \frac{q}{r}\right\}$$
$$=\frac{1}{r^2}(-2q_ip_jr + q_iq_j\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{q}} + \delta_{ij}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}r)$$

6．第6項

$$\left\{\frac{q_i}{r}, q_j\boldsymbol{p}^2 - p_j\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}\right\}$$
$$= -\frac{1}{r^2}(-2q_jp_ir + q_iq_j\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{q}} + \delta_{ij}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}r)$$

以上の結果をまとめると

$$\{A_i, A_j\}$$
$$=2b^2\boldsymbol{p}^2(-q_ip_j + q_jp_i) - b^2(-q_ip_j + q_jp_i)\boldsymbol{p}^2$$
$$- b\frac{1}{r^2}(-2q_ip_jr + 2q_jp_ir)$$
$$= -\left(b^2\boldsymbol{p}^2 - \frac{2b}{r}\right)(q_ip_j - q_jp_i)$$

ここで

$$b^2\boldsymbol{p}^2 - \frac{2b}{r} = \frac{1}{\mu^2k^2}b^2\boldsymbol{p}^2 - \frac{2}{\mu k}\frac{1}{r}$$
$$= \frac{2}{\mu k^2}\left(\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{p}^2 - \frac{k}{r}\right)$$
$$= 2b^2\mu H$$

なので

$$\{A_i, A_j\} = -2\mu b^2\epsilon_{ijk}L_kH$$

が得られる。

参考文献

[1] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer,（2017）

[2] C. Ross, "Moment maps and Hyperkähler quotients", https://cdross1.github.io/notes/moment maps.pdf

[3] 山川大亮, "モジュライ空間と運動量写像", 第３回城崎新人セミナー報告書（2006）https://sites.google.com/view/mathgraduate/KINOSAKI/2006/proceeding

[4] 浜中真志, "Hyper-Kähler 幾何の数理と物理", 素粒子論研究**119**（4C）, 245-279,（2012）

[5] 岩井敏洋, "SU（2,2）に付随する力学系", 数理解析研究所講究録第**863**巻, 121-131（1994）

[6] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley,（1950）

[7] W. Lenz, "Über den Bewegunsverlauf und die Quantenzustäde der gestörten Keplerbewegung," Z. Phys. **24**, 197–207（1924）（in German）;

[8] C. Runge, "Vektoranalysis," Verlag Von S. Hirzel, Leipzig, 1919.

[9] 国場敦夫 "ラプラス–ルンゲ–レンツベクトル—Gruppen Pestの始祖的例題", 数理科学 **529**, 50-55,（2007）

[10] J. Marsden and A. Weinstein, "Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry", Reports on Mathematical Physics Vol.**5**, 121-130（1974）

[11] T. Bartsch, "The Kustaanheimo-Stiefel transformation in geometric algebra", J. Phys. A **36**, 6963（2003）

[12] P. Saha, "Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics", Mon.Not.Roy.Astron.Soc. **400**, 228（2009）e-Print: 0803.4441 [astro-ph]

[13] P. Kustaanheimo and E. Stiefel, "Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization", J. Reine Angew. Math. **218**, 204-219（1965）

[14] H. V. McIntosh and A. Cisneros, "Degeneracy in the presence of a magnetic monopole", J. Math. Phys. **11**, 896-916（1970）

[15] Toshihiro Iwai and Yoshio Uwano, "The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the threedimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory", J. Math. Phys. **27**, 1523-1529（1986）