〔論　説〕

四色問題の理論的解決

神　頭　広　好

Ⅰ　はじめに

四色問題（空間におけるあらゆる地図は四色で塗り分けられる）に挑戦してきた研究者を見ていくと、まずガスリーは1852年にイギリスの地図から少ない色で４色あれば塗り分けることが可能であると考えていた。これは比較的簡単に解ける問題と考えられていたもののド・モルガンでもはがたたず、1879年にケンペによって証明されたかに見えたが、11年後ヒーウッドがケンペの証明の誤りを発見した[1]。その後、20世紀に入り、ポアンカレの弟子であるバーコフ（1913）や積分で有名なルベーグなどによって幾何学およびグラフ理論の観点から四色問題を解こうと試みている。

最終的には、1976年にイリノイ大学のアッペルとハーケンが100億回の計算をコンピューターで約1200時間かけて行うことで四色問題を検証した[2]。それによって、この問題は四色定理となっている。ちなみに計算機を使った証明につ

1 これについては、Willson（2002）（和訳、2004年）、Goldsmith（2019）（和訳、2021年、pp.140-141）、一松（2016年、第1章）を参照せよ。

2 これについては、竹内（1976年、pp.2-6）、Appel and Haken（1977,chap.4）、Saaty and Kainen（1977, chap.3）、一松（2016年、第7章）を参照せよ。

いては賛否両論ある[3]。

本論では、絵具同様に単色は単体として１単位の重さを有していることを前提に、ニュートンの引力の法則を応用して、幾つかの単体から成る集合体と所与の単体との引力関係から境界を導く。さらに、集合体における幾つかの単色を完全に混ぜ合わせた混合色体とそれよりも淡い単体、例えば、白の単体との関係に置き換えることによって、その間の空間距離は少なくとも単体間において色の濃淡を示す濃淡色距離となる。この空間における集合体ー単体間の引力の境界において、どちらにも影響される単色を有する単体が生まれ、これの繰り返しの結果、最小の単色数で単色を生む空間では、４つの単色が存在することが示される。最終的に集合体（または混合色体）方向の引力によって４つの単色は連接することになり、この空間的秩序にもとづき、１次元空間から２次元空間に拡張することによって、地図上におけるすべての地域は４色で塗り分けられることになる。これについては３次元の立体空間についても当てはまる。

Ⅱ　四色問題の理論的解決

ここでは、四色問題を解くに当たり、以下の諸仮定が設定される。

(1) 単体とは単色を有しており、その重量は１単位である。また幾つかの単体を有する集合体 (または、幾つかの単色を完全に混ぜ合わせた混合色体) と所与の単色を有する単体が存在している。

(2) 集合体とその単体とは重さによってニュートンの引力が働き、それぞれの引力が均衡する境界となるところに、どちらにも影響される単体が生まれる。さらに、その単体と集合体の引力による境界において別の単体が生まれる。

(3)(2) の繰り返しによって、集合体と所与の単体の間には、幾つかの単体が生まれていく。

まず、集合体と所与の単体の引力との境界条件は、ニュートンの引力の法則

3 これについては、Willson(2002) (和訳、2004年、第11章) を参照せよ。

から、

$$\frac{P_M P_c}{d_{Mc}^2} = \frac{P_m P_c}{d_{mc}^2} \tag{1}$$

で表される。ただし、P_Mは幾つかの単体を有する集合体、P_mは所与の単体、P_cは境界における仮想の単体、d_{Mc}はP_MとP_cとの間の距離、d_{mc}はP_mとP_cとの間の距離を示す。

さらに、図１において総距離は、

$$d = d_{Mc} + d_{mc} \tag{2}$$

で表される。ただし、d はP_MとP_m間の距離を示す。

図１

(1) 式および (2) 式からなる連立方程式を解くと、

P_MとP_cの間の距離は、

$$d_{Mc} = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{P_m}{P_M}}} \tag{3}$$

で表される。

また、P_mとP_cの間の距離は、

$$d_{mc} = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{P_M}{P_m}}} \tag{4}$$

で表される。

つぎに、幾つかの単色の数としての集合体ではなく、これに含まれる単色を完全に混ぜ合わせた重量も集合体と同じ重量であるため、これを混合色体とすれば、最初の所与の単体との間に引力が生まれることになる。例えば、色彩においてイメージし易いためにこの単体を白色とすると、最初は混合色体と白色の単体との境界に淡い単色の単体が生まれ、混合色体に近づくにつれてより濃い色の単色としての単体が順次生まれていく。それゆえ、混合色体と白色の単体間の距離 d は少なくとも濃淡色距離を示している。ここでは、P_mは重量１単位を有する白の単体であり、$P_m = 1$とする。また (4) 式から相対的に最も強い濃色としての混合色体へ引き付けられる最初の単体P_mを１個として、第$n-1$番目までの境界に生まれる各単色からの単色間距離または境界間距離は、

$$c_1 = \frac{d}{1+\sqrt{P_M}} ,$$

$$c_2 - c_1 = \frac{d - c_1}{1+\sqrt{P_M}} ,$$

$$c_3 - c_2 = \frac{d - c_2}{1+\sqrt{P_M}} ,$$

$$\vdots$$

$$c_{n-1} - c_{n-2} = \frac{d - c_{n-2}}{1+\sqrt{P_M}} \tag{5}$$

で表される。ただし、c_1は最初の単色と第１番目に生まれた単色との間の距離、$c_{n-1} - c_{n-2}$はc_{n-2}における単色と最後の境界となるc_{n-1}に生まれた単色との間の距離を示す。

(5) 式から、各単体間の距離の総和を求めると、

$$c_{n-1}=\frac{(n-1)d}{1+\sqrt{P_M}}-\frac{c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}}{1+\sqrt{P_M}} \tag{6}$$

で表される。また、この空間において最初の単体１個が存在するために、これを除いた$n-1$個の単色までが存在するとして、単色が存在する空間を考慮して$c_{n-1}\approx d$とする。

さらに、(6) 式をdで除すると、

$$1=\frac{n-1}{1+\sqrt{P_M}}-\frac{c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}}{d\left(1+\sqrt{P_M}\right)} \tag{7}$$

で表される。ただし、P_Mは自然数の二乗である。

ところで、(7) 式の右辺の第２項が無視される場合は、(7) 式の第１項が１の自然数であれば、第２項の部分において１以下であることによる自然数でない条件を明らかにすることである。その条件は、

$$0<\frac{c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}}{d\left(1+\sqrt{P_M}\right)}<1 \tag{8}$$

である。(8) 式を拡張すると、

$$0<\frac{c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}}{d\left(1+\sqrt{P_M}\right)}<\frac{n-2}{1+\sqrt{P_M}} \tag{9}$$

で表される。(9) 式が満たされるためには、(8) 式から、

$$\frac{n-2}{1+\sqrt{P_M}}<1 \tag{10}$$

を必要とする。(10) 式が満たされるならば、この部分は自然数ではないために無視される。

これによって、(7) 式は、

$$1=\frac{n-1}{1+\sqrt{P_M}} \qquad (11)$$

に書き換えられる。

さらに、この空間における単色の数は、(11) 式から、

$$n=2+\sqrt{P_M} \qquad (12)$$

で表される。

ここで、最小の単色数で、地図が塗り分けられる空間を考慮すると、混合色体または数としての集合体における最小の単色数は１を除くと、n は自然数であることから、$P_M=4$ である。これを (12) 式に代入すると、

$$n=P_M=4 \qquad (13)$$

である。これを (10) 式に代入すると、(10) 式が満たされる。それゆえ (11) 式が満たされることになる。

(13) 式は、４つの単色から成る集合体または混合色体から最初に関係を持つ単色 P_1 (= P_m) 以外に３つの単色を空間に生みだすことを示している。いずれにしてもこの混合色体を除く空間上には４つの単色が存在することになる。(図２参照)

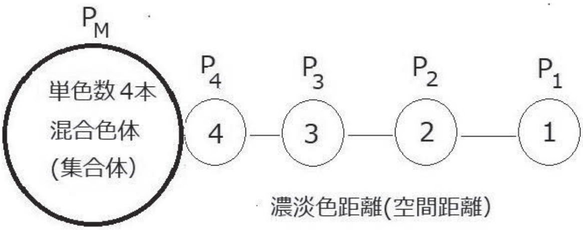

図２

注）上図の数値は異なる単色を示している。(以下同様)

言い換えれば、これは最大４つの単色の数で空間が分割されることを示唆している。ただし、１次元の空間では四色問題が解決されても、異色同士が接し合うという理由がなければ２次元空間における地図へは応用できない。

そこで、この空間において４色のみが重量１単位を有する単体として存在するゆえ、P_Mに接しているP_4を除いた３つの単体は集合体方向の引力によってそれぞれが引っぱられることになる。（ 図３参照 ）

最終的に、この空間上の４つの単色を有する単体が連接することになる。この１次元空間においては、集合体と接しているP_4がすべて３つの単体P_3、 P_2、P_1に対してより強い引力を持っている[4]。これを段階的に見ると、P_4と接するP_3は P_2およびP_1に対してより強い引力を持ち、P_3と接する P_2はP_1に対してより強い引力を持っていることになる。このような空間的秩序が２次元空間においても同様と考えるならば、さらに、４の単色は混合色体の色に最も近いことから、混合色体と一体すると、このP_4は他の３つの単体と同時に接し、P_3は P_2、P_1と同時に接し、P_2はP_1と接する。それゆえ四色で分割された多くの空間が接することによってこの空間は四色で塗り分けられる。ここで、全体の空間を地図として、分割された空間を地図に描かれた地域とすると、地図は四色で塗り分けられることになる。ここでは、同色同士が接することなく、図４において長方形で区切られた地図が描かれている。ただし、幾つかの地域が連接して、それを覆うような地域がある場合についての基本的地図は図５に描かれている。例えば、図５は３つの地域が連接していて、それらを覆う地域があっても四色で塗り分けられることを示している。また、図６には図５を踏まえて四色で塗り分けられた地図が掲げられている。

さらに、図３における円を球に代えることによって、これは３次元空間でも成立する。また、色には異色系の濃淡色もあれば同色系の濃淡色もあるが、こ

4 これを２次元空間に拡張すると、P_4がそれぞれ３つの単体とランダムに接することができる力を有していると考えられる。

こではどちらの濃淡色であっても唯一の色であることには変わりなく、濃淡色を単色として問題はない。これで四色問題は解決された。

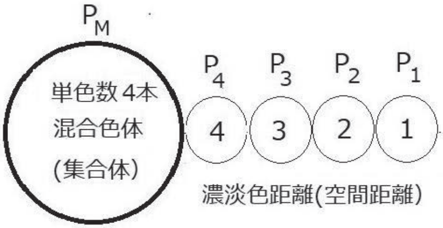

図３

1	2	3	4	3	2	1
2	1	2	3	2	1	2
1	2	3	4	3	2	1
2	1	2	3	2	1	2
1	2	3	4	3	2	1

図４

注）上図は、四色による長方形35地域の色を表示している。これは列を交互に、行を交互に追加することによっていくらでも地域および色を拡大することができる。地域の形状が変わろうともこの地図の色を当てはめると、四色あれば地図は塗り分けられる。

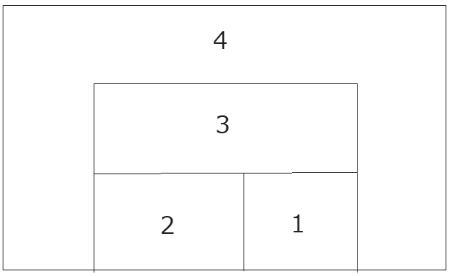

図５

注）上図において4の色は他のどの色も引き付けるためにどの配置であっても構わない。

上記の内容を簡単に纏めると、４本（４色）の絵具セットと１本（１色）の

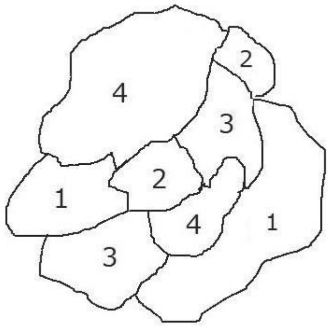

図６

注）上図において４の色は、これを除きすべて３つの色を引き付けていることを示唆している。

絵具を使って、異なる３つの色を見出し、空間上に揃う４つの色を使うことによって、すべての地図が塗り分けられるということを示している。

Ⅲ　おわりに

本論では、単色で１単位の重量を有する単体から成る集合体と所与の単体があり、これにニュートンの引力の法則を応用すると、数としての集合体は混色としての混合色体に置き換えられ、その結果、混合色体と単体との空間距離は、濃色一淡色間の距離（濃淡色距離）に置き換えられる。ただし、混合色と単色によっては淡濃色距離になる場合がある。また混合色体と単体との引力関係から生じる境界において、それぞれに影響される単色が生まれる。さらに、その単色と混合色体の引力によって生じる境界に単色が生まれる。これを繰り返しながら単色は混合色体の濃色に近づいていく。このプロセスを通じて、単色数を最小にする空間において４つの単色数が存在することが示される。その後、３つの単色が混合色体と一体化した４の単色の方向に引っぱられることによって最終的に同一空間上の四色だけが接し合うことになる。その空間的秩序にもとづき、１次元空間を２次元空間へ拡張させることによって、どの地図でも異

なる四色で塗り分けられることが分かった。これは３次元空間においても同様である。なお、集合体と単体との最初の空間的設定については、宇宙の始まりを説明するのと同じ位の難しさはある。

参考文献

Appel, K and W. Haken（1977）*The Solution of the Four-Map- Problem*, SCIENTIFIC AMERICAN, October (島内剛一訳「４色問題の解決」『別冊　日経サイエンス172』）

Goldsmith, M.（2019）*Inside Mathematics: Understanding shapes and sizes*, Shelter Harbor Press Ltd, New York, USA (緑慎也訳『深淵なる「幾何学」の世界』創元社、2021年)

Saaty,T.L and P.Kainen（1977）*The Four Color Ploblem―Assaults and Conquest*, McGraw-Hill.

Willson, R.（2002）*Four Colours Suffice*, Allen Lane Science. (茂木健一郎訳『四色問題』新潮文庫、2004年)

一松　信『四色問題』講談社、2016年

竹内外史「四色問題＝ついに解決！」『数学セミナー』1976年、10月号、pp.2-6