Moment Map のすすめ（II）

池　森　　均
北　門　新　作
佐　藤　俊　郎
松　井　吉　光

要　　約：Moment map とは、力学系における保存量としての運動量などの概念を一般化して、symplectic manifold 上の幾何学的な量に対する群の作用によって定義した写像を意味する。数学的な moment map の定義は、物理的直感が利かず、物理学者にとってはなかなか馴染みにくい。そこで、本稿では moment map の定義を物理学的に解釈し、またそれに関わる重要な帰結を物理学の立場で整理し、その重要性について考察する。本稿では、有限次元の力学系について考察した「Moment Map のすすめ（Ⅰ）」につづき、無限次元の力学系としての gauge 場の理論における moment map について考察する。

キーワード：Moment map、Symplectic manifold

1. はじめに

Moment map とは、力学系における保存量としての運動量などの概念を一般化して、Symplectic manifold 上の幾何学的な量に対する群の作用によって定義した写像を意味する。簡単に言うと、moment map とは phase space の座標（q_i, p_i）に対して群 G を作用させたときに、その作用した後の phase space が再び symplectic であることが保証される（即ち、symplectic 2-form が保存される）ような群作用の生成子のことだという見方が出来る［１］-［15］。

gauge 場の理論は無限次元の力学系とみなすことができるので、symplectic 構造を導入することができる。したがって、それは gauge 理論にも moment map という概念を持ち込むことができるということを意味する。驚くことに、そこに現れる moment map は、gauge 理論の topological な構造に関わる重要な方程式であることがわかる。例えば、４次元の gauge 理論では、gauge 場が依存する空間座標の数に応じて、Nahm 方程式や［17］、Hitchin 方程式［18］、BPS 方程式［19］などが現れる。さらに instanton 解を与える（anti-）self dual equation や ADHM 方程式も moment map であると解釈することができる。これらすべてを moment map として統一的に解釈することができるのである。

本稿では、有限次元の力学系について考察した「Moment Map のすすめ（Ⅰ）」につづき［16］、無限次元の力学系としての gauge

場の理論における moment map について考察する。

4 次元の gauge 理論に入る前に、簡単な例として 2 次元の gauge 理論から話を始める。これからみるように 2 次元の gauge 理論は、そこに moment map を導入する際に古典力学系との対応関係が見やすく、moment map が gauge 理論の中にどのように導入されるかが分かりやすい。そこで、まず 2 次元の gauge 理論の話から始めることにする。その上で、その議論を踏まえて 4 次元空間の gauge 理論へと話を拡張していく。

2. 2 次元 Gauge 理論における Moment Map

2.1. Moment Map の導出

2 次元の$\mathrm{U}(n)$ gauge 理論を考える[3]。2 次元空間の座標を(t,x)と表すことにして gauge 場を

$$A = A_0 dt + A_1 dx$$

と表す。ただし、ここでは議論を簡単化するためと、古典力学の phase space との対応関係を見やすくするために、2 次元空間の座標を表す変数のうち変数 x の依存性はないと仮定する。（ただし、後の議論でx 依存性を残したままでも、同じように moment map の考察が可能であるということを示す。）すると A の張る空間は

$$A \ : \ C^\infty(I,\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{R}^2$$

と考えられる。ただし、I は変数 t の定義域であり、I=[0,1] であるとする。すると、gauge 場を

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} A_{0t} \\ A_{1t} \end{pmatrix}$$

という 2 行無限列の行列で表される $2\times\infty$ 次元位相空間の座標とみなすことができるようになる。即ち、この空間には自然に

$$\begin{aligned}\omega &= \mathrm{tr}\sum_t dA_{0t}\wedge dA_{1t} \\ &= \mathrm{tr}\int_0^1 dA_0(t)\wedge dA_1(t)dt\end{aligned}$$

という symplectic 構造を導入することができる。つまり、n 次元空間における古典力学系の $2\times n$ 次元 phase space

$$\begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix} \quad (i=1,\cdots,n)$$

を考えたときには、symplectic 構造として$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i\wedge dp_i$を導入するが、$A_0$, A_1 をそれぞれq,p と見做し、t を無限次元空間の座標軸を表す添字と考えて A_{0t} を q_i、A_{1t} を p_i と対応させれば、上で定義した二つのωは次元の大きさ（∞次元と n 次元）が違うだけで、同じものであることがわかる。

そこで、Gを$\mathrm{U}(n)$として $\mathfrak{g}$ 値 A に作用させる。この Gは所謂 gauge 群であり、内部空間に作用する群である。古典力学系での moment map の議論では、作用する群は直接 phase space に作用していたが、ここでは A の内部空間に作用するという点でこれまでとは異なる議論となる。いわば、古典力学において質点系ではなく球対称な剛体系を考え、剛体の回転を引き起こす群についての作用を考えるようなものだといえるだろう。

ただし、ここで気をつけておかなければいけないことがある。それは、A に作用する群は部分群$\mathcal{G} = C^\infty(I;G)$ でなければならない。なぜなら、一般的に$C^\infty(X;G)$ $(X = I\times\mathbb{R})$ が作用すると、x 方向の依存性についての仮定が崩れてしまうからである。このとき、とにかくωを不変にするように$\mathcal{G}$ を作用させることが出来ればよい。その作用の仕方は次のようなものが考えられる。

$$A_0 \to gA_0g^{-1} + ig\frac{\partial}{\partial t}g^{-1}$$
$$A_1 \to gA_1g^{-1}$$

ただし、ここで作用しているのは full の $\mathcal{G}$ ではなく、gauge 場の configuration の condition を変えない部分群 $\mathcal{G}_0=\{g \in \mathcal{G}|g(0)=g(1)=1\}$ であることにする。

群が上述のように作用することとして、これに伴う tangent vector field を考えると

$$\begin{aligned} X =& \frac{d}{ds}\left(e^{-is\Lambda(t)}A_0(t)e^{is\Lambda(t)} \right. \\ & \left. +ie^{-is\Lambda(t)}\frac{d}{dt}e^{is\Lambda(t)}\right)\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial A_0(t)} \\ & + \frac{d}{ds}\left(e^{-is\Lambda(t)}A_1(t)e^{is\Lambda(t)}\right)\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial A_1(t)} \\ =& \left(i[A_0,\Lambda] - \frac{d\Lambda}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial A_0} + i[A_1,\Lambda]\frac{\partial}{\partial A_1} \end{aligned}$$

と表される。これと ω の interior product を計算すると

$$\begin{aligned} &\omega(X,\cdot) \\ &= \mathrm{tr}\int dt\left\{\left(i[A_0,\Lambda] - \frac{d\Lambda}{dt}\right)dA_1 - i[A_1,\Lambda]dA_0\right\} \\ &= \mathrm{tr}\int dt\left\{d\left(\frac{dA_1}{dt}\right)\Lambda + i[A_0,\Lambda]dA_1 - i[A_1,\Lambda]dA_0\right\} \\ &= \mathrm{tr}\int dt\left\{d\left(\frac{dA_1}{dt} + i[A_1,A_0]\right)\Lambda\right\} \end{aligned}$$

となる。この式をみると、moment map の定義から field strength

$$\frac{dA_1}{dt} + i[A_1,A_0]$$

が ω を不変にする $\mathfrak{g}^*$ 値の moment map であるといえる。この式は、x に依存しない場合の2次元空間における field strength F_{01} と見ることが出来る。あるいは、見方を変えると、A_1 を scalar 場 ϕ と見做せば scalar 場の１次元 gauge 場 A_0 中の covariant derivative $D_0\phi$ とみることもできる。したがって、もしこの moment map の値を０に固定すれば、それは

$$\mu(0) = D_0\phi = 0$$

という方程式を与えている。

2.2. Symplectic Quotient と Moduli Space

次に前節の２次元 gauge 場についての symplectic quotient $\mu^{-1}(0)/G$ について考える。

まず、moment map の値が０であるような gauge（或いは Higgs）場の configuration の一つを

$$A_{\mathrm{fl}} = A_0(t)dt + A_1(t)dx$$

とする。この A_{fl} に対して、

$$\frac{dg}{dt} = -A_0g$$

を満たす $g(t)$(boundary condition $g(1)=1$) で gauge 変換すると

$$\begin{aligned} &A_{\mathrm{fl}} \to A'_{\mathrm{fl}} \\ &\equiv g^{-1}A_{\mathrm{fl}}g - dg^{-1}g \\ &= g^{-1}A_0gdt + g^{-1}A_1gdx + g^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dx\right) \\ &= g^{-1}A_0gdt - g^{-1}A_0gdt + g^{-1}A_1gdx + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}dx \\ &= g^{-1}A_1gdx + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}dx \\ &= \left(g^{-1}A_1g + g^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}\right)dx \\ &= g^{-1}A_1gdx = A'_1dx \end{aligned}$$

となる。（ただし、この $g(t)$ は $g(1)=1$ に固定しているので full の $\mathcal{G}$ の element ではなく、$\mathcal{G}_1 = \{g \in \mathcal{G} \mid g(1) = 1\}$ の element であることに注意。）したがって、この変換により $A'_0 = 0$ とすることができる。今考えている configuration A_{fl} は moment map の値が０なので、

$$\frac{dA_1'}{dt}+[A_0',A_1']=\frac{dA_1'}{dt}=0$$

を満たし、A_1' は t によらない定数とすることが出来る。つまり、任意の $A_{\mathfrak{fl}}$ は gauge 変換により必ず

$$(A_0,A_1)=(0,\eta)\quad(\eta=\mathrm{const.})$$

という形に持ち込むことが出来る。この式が表す空間は、t に依存しないので有限次元の自由度であり、$\mathfrak{g}$ の自由度しかない。即ち、群 $\mathcal{G}_1$ の作用によって無限次元の空間から有限次元の空間へと reduce されたことになる。

ところで、前述のように最初に与えた A に対して、微分方程式

$$\frac{dg}{dt}=-A_0g$$
$$(\text{boundary condition}:\ g(1)=1)$$

を満たす g を作用させて（A_0,A_1）を（$0,\eta$）（ただし$\eta\in\mathfrak{g}$）に reduction した場合、この g は$g\in\mathcal{G}_1$ であって、$\mathcal{G}_0$ の element とは言えない。$\mathcal{G}_1$ は $\mathcal{G}_0$ よりは boundary condition の分だけ大きいので、商空間は必要以上に小さくなっている。したがって、実際は symplectic quotient の空間はもう少し自由度があるはずである。$\mathcal{G}_1$と$\mathcal{G}_0$ の違いは $t=0$ での $g(t)$ の値が固定されているかいないかの違いであることから $\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_0\simeq G$ と考えられる。即ち、

$$\mathcal{A}_{\mathfrak{fl}}/\mathcal{G}_1\simeq\mathfrak{g}\quad\Rightarrow\quad(\mathcal{A}_{\mathfrak{fl}}/\mathcal{G}_0)\cdot(\mathcal{G}_0/\mathcal{G}_1)\simeq\mathfrak{g}$$

と考えることが出来る。よって

$$\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_0=\mathcal{A}_{\mathfrak{fl}}/\mathcal{G}_0\simeq(\mathcal{G}_1/\mathcal{G}_0)\times\mathfrak{g}=G\times\mathfrak{g}$$
$$(G\simeq g(0),\ \mathfrak{g}\simeq\eta)$$

となることがわかる。

以上の議論から、symplectic quotient の空間、即ち moduli space は $G\times\mathfrak{g}$ であることが分かった。しかし、有限次元空間である symplectic quotient の座標がもともとの無限次元空間 phase space の座標（$A_0(t)$, $A_1(t)$）でどのようにあらわされるのか、また symplectic quotient で の symplectic 2-form を、Marsden & Weinstein theorem の観点から導き出すことができるのか、という問題に対しては open question となっている。

2.3. 空間依存性を持たせた場合の2次元 Gauge 理論の Moment Map

ここまでの 2 次元 gauge 理論での moment map の導出方法は、古典力学における phase space との対応を見やすくするために、空間方向の依存性を持たない場合に限っていた。しかし、空間座標 x の依存性を消さなくても、2 次元空間の各点を無限次元の方向を表す座標軸の番号と考えてしまえば、前節と同じ結論が得られることがわかる。

前節からの類推で、今回の symplectic 2-form は

$$\omega=\mathrm{tr}\int_M dA_0(t,x)\wedge dA_1(t,x)dS$$
$$(dS=dtdx)$$

と書くことが出来る。ここで、M は 2 次元の base manifold 全体を表していて、M 全体で積分している。座標依存性は $x_0(=t)$, $x_1(=x)$ の 2 つなので、gauge field に対して群 $G(=\mathrm{U}(n))$ は

$$A_0\to g^{-1}A_0g+ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}$$
$$A_1\to g^{-1}A_1g+ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}$$

のように作用する。ただし、ここでも作用は 2 次元空間の無限遠点で $g(t,x)\to1$ を満たすもの、即ち無限遠点での A_μ の境界条件を変えないものと仮定する。これは t だけに依存する場合の議論でも採用していた条件である。その結果、この作用による tangent vector field Xは

$$X = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left\{\left(e^{-is\Lambda}A_0e^{is\Lambda} + ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_0} + \left(e^{-is\Lambda}A_1e^{is\Lambda} + ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}\right\}$$
$$= \left(i[A_0,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial A_0} + \left(i[A_1,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}$$

と表され、これを使って symplectic 2-form ω との interior product を作ると

$$\begin{aligned}
&\omega(X,\cdot)\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{\left(i[A_0,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)dA_1 - \left(i[A_1,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)\right\}dA_0\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\Lambda - d\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)\Lambda + i\left(dA_1A_0 - A_0dA_1 - dA_0A_1 + A_1dA_0\right)\Lambda\right\}\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} + i[A_1,A_0]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}$$

が得られる。ただし、表面積分は、$g(t,x) \xrightarrow{(t,x)\to\infty} 1$、即ち $\Lambda(t,x) \xrightarrow{(t,x)\to\infty} 0$ により落ちることを仮定している。したがって、定義によりこの場合の moment map は

$$\mu = \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} + i[A_1,A_0]$$

となることが分かり、これはまさに field strength F_{01} である。したがって、特に $\mu = 0$ は flat connection を表す。

ところで、後で役に立つことになるので、ここで上の議論を複素化して Kähler manifold の変数で表現してみることにする。まず、gauge 場を $u = A_0 + iA_1$ のように表して、$u, \overline{u}$ を変数とすることにする。A を $u, \overline{u}$ で書き直すと

$$\begin{aligned}
A &= A_0dt + A_1dx\\
&= \frac{u+\overline{u}}{2}dt + \frac{\overline{u}-u}{2}idx\\
&= u\frac{dt-idx}{2} + \overline{u}\frac{dt+idx}{2}
\end{aligned}$$

となる。ここで、$z = \frac{1}{2}(t+ix)$, $\overline{z} = \frac{1}{2}(t-ix)$ とすると

$$A = ud\overline{z} + \overline{u}dz$$

と表される。また、

$$\begin{aligned}
du\wedge d\bar{u} &= (dA_0 + idA_1)\wedge(dA_0 - idA_1)\\
&= 2idA_1\wedge dA_0
\end{aligned}$$

なので、$u, \bar{u}$ で表現したときの symplectic 2-form は

$$\omega = \frac{i}{2}\mathrm{tr}\int_0^1 du\wedge d\bar{u}dt$$

となる。$(u,\bar{u})$ に gauge 群 $\mathcal{G}$ を作用させることによる tangent vector field は、直ちにわかるように algebra $\mathfrak{g}$ に値をもつ Λ に対する covariant derivative

$$D_{\bar{z}}\Lambda = i[u,\Lambda] + \frac{\partial\Lambda}{\partial\bar{z}}$$
$$D_z\Lambda = i[\bar{u},\Lambda] + \frac{\partial\Lambda}{\partial z}$$

を成分に持っている。したがって、

$$\begin{aligned}
&\omega(X,\cdot)\\
&= \frac{i}{2}\int dS\left\{\left(i[u,\Lambda] + \frac{\partial\Lambda}{\partial\bar{z}}\right)d\overline{u} - \left(i[\overline{u},\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial z}\right)du\right\}\\
&= \frac{i}{2}\int dS\left\{-d\left(\frac{\partial\overline{u}}{\partial\bar{z}}\right)\Lambda + d\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Lambda + i[u,\Lambda]d\overline{u} - i[\overline{u},\Lambda]du\right\}\\
&= \frac{i}{2}\int dS\left\{d\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial\overline{u}}{\partial\bar{z}} + i[\overline{u},u]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}$$

となり、moment map μ は

$$F_{z\bar{z}}(=F_{01}) = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial\overline{u}}{\partial\bar{z}} + i[\overline{u},u]$$

であることが分かる。この表現は、後に Hitchin 方程式を moment map として導出する際に利用することになる。

2.4. 2次元 Gauge 理論におけるもう一つの Moment Map

無限次元だからと言って A の空間を特別扱いしないとすると、他にも空間の対称性は存在するはずである。例えば、古典力学系において Gを$U(1)$ とし、$x_\mu = (q_i, p_i)$ としたときに、この manifold に対して G が

$$x_\mu \to x_\mu(t) = (q_i, p_i)e^{i\lambda\sigma_2 t}$$

のように作用することを考えることが出来た。この場合、この作用でωは不変に保たれていたので moment map が存在する。どのように考えたか思い出してみると、まず

$$\left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} = \lambda(q_i, p_i)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda(-p_i, q_i)$$

となるので tangent vector field は

$$\begin{aligned} X &= \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ &= \lambda(-p_i,\ q_i)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_i} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ &= \lambda\left(-p_i\frac{\partial}{\partial q_i} + q_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \end{aligned}$$

と表される。つまり、所謂 tangent vector field、

$$X_h = a_i\frac{\partial}{\partial q_i} + b_i\frac{\partial}{\partial p_i}$$

と比較すると λ を除いて考えれば

$$a_i = -p_i, \quad b_i = q_i$$

であることがわかり、それを $\omega(X,\ \cdot) = dh$ の式に代入すると

$$dh = q_i dq_i + p_i dp_i$$

となる。その結果、この場合の moment map は

$$h = \frac{1}{2}(q_i^2 + p_i^2)$$

であることがわかったのだった。この (q_i, p_i)を$(A_0(t), A_1(t))$ に置き換えれば、無限次元といえども全く同じ議論ができるはずである。即ち、$(A_0(t), A_1(t))$ に対して $G =$U(1) が

$$A_\mu(t) \to A'_\mu(t) = (A_0(t), A_1(t))e^{i\lambda\sigma_2 s}$$

のように作用することにする。すると、

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA_\mu}{ds}\right|_{s=0} &= \lambda(A_0(t), A_1(t))\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(-A_1(t), A_0(t)) \end{aligned}$$

となるので tangent vector field は

$$\begin{aligned} X &= \left.\frac{dA_\mu}{ds}\right|_{s=0}\frac{\partial}{\partial A_\mu} \\ &= \lambda(-A_1(t),\ A_0(t))\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial A_0(t)} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial A_1(t)} \end{pmatrix} \\ &= \lambda\left(-A_1(t)\frac{\partial}{\partial A_0(t)} + A_0(t)\frac{\partial}{\partial A_1(t)}\right) \end{aligned}$$

これと ω の interior product を計算すると

$$\begin{aligned} \omega(X, \cdot) &= \mathrm{tr}\int dt\lambda(A_0 dA_0 + A_1 dA_1) \\ &= \mathrm{tr}\int dt\left(d\left\{\frac{1}{2}(A_0^2 + A_1^2)\right\}\right) \end{aligned}$$

となるので、この場合の moment map は

$$\mu = \frac{1}{2}\left(A_0^2(t) + A_1^2(t)\right)$$

であることがわかる。これは gauge field の質量項である。つまり、$\mu^{-1}(0)$ の世界は massless の gauge 場の世界ということを意味していると考えられる。

3. 4次元 Gauge 理論の Moment Map

これまでの２次元 gauge 理論を４次元 gauge 理論に拡張することができる。その結果、よく知られている（anti）self-dual equation（Nahm equation, Hitchin equation etc.）などの、gauge 理論の topological な性質に関わる重要な方程式が moment map であることを示すことができる。

２次元の場合は、まず座標依存性を１つに絞ると $(A_0(t), A_1(t))$ をそのまま (q_i, p_i) に対応させることができた。従って、古典力学との対応をみながら理解することが出来て、そのうえで座標依存性を増やすことができた。また、そのとき古典力学の phase space の座標 (q_i, p_i) を複素に組んで Kähler 空間とみることもできた。

同様にして、４次元の gauge 理論の場合は、phase space を hyperkähler manifold と見ることが出来る。この場合は言わば q_i, p_i の他に、もう２つの独立な変数が必要となるようなものなので、そのまま古典力学に対応付けて考えることはできない。しかし、technical には２次元のときの議論から類推して話を進めていくことが可能である。

以下、４次元空間における $\mathrm{SU}(n)$ gauge 場を対象に議論を進める。考えるべき空間は常に hyperkähler 空間であるが、座標依存性については０から４までのすべての場合について別々に検討する。まずは一番簡単な座標依存性０の場合、即ち有限次元の hyperkähler 空間における moment map の解説から始める。これは local な対称性を持つ gauge 場の理論の話ではなくなってしまうが、４次元 gauge 理論に現れる manifold が Kähler ではなく hyperkähler であることに加え、考えるべき phase space が有限次元なのか無限次元なのかの違いだけであるため、有限次元の hyperkähler 空間の moment map を理解しておくと、無限次元の hyperkähler 空間の moment map を理解することは容易であるためである。また、ある意味では座標依存性０の場合から出てくる moment map は ADHM 方程式と関連していることが分かる。

3.1. Kähler manifold 及び Hyperkähler manifold での moment map

有限次元の hyperkähler manifold の議論に入る前に、有限次元 Kähler manifold から議論を始める。これは、２次元 gauge 理論の有限次元 version であり、Kähler manifold から hyperkähler manifold への拡張は容易だからである。

今、特に $n \times n$ の complex matrix Z で張られる空間を phase space $\mathrm{M}= M(n, \mathbb{C})$ とし、これに $\mathrm{U}(n)$ 群が作用するものとする。このとき symplectic 2-form は

$$\omega = \frac{i}{2} dZ_{\alpha\beta} \wedge dZ^{\dagger}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \mathrm{tr}(dZ \wedge dZ^{\dagger})$$

である。これは２次元 gauge 理論で扱った空間とほぼ同じであり、無限次元か有限次元かの違いしかない。従って $\mathrm{U}(n)$ 群は、$g \in \mathrm{U}(n)$ とすると

$$Z \to gZg^{\dagger}$$
$$Z^{\dagger} \to gZ^{\dagger}g^{\dagger}$$

のように作用することになる。したがって、これに伴う moment map は２次元 gauge 場のときの field strength で微分項のない交換関係部分だけになることが分かる。即ち

$$\mu = \frac{i}{2}[Z, Z^{\dagger}]$$

である。

例えば、具体的に $n = 2$ として、詳しく成分に分解して考えてみよう。即ち $Z \in \mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ である。これに対して $G = \mathrm{U}(2)$ を adjoint に作用させる場合の moment map

を考える。その場合座標を複素数の成分として

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix},\ Z^\dagger=\begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{21} \\ \bar{z}_{12} & \bar{z}_{22} \end{pmatrix}$$

で表すことにする。すると、adjoint に作用するのでその座標の微小 U(2) 変換は

$$\begin{aligned} Z &\to e^{-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}}Ze^{it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}} \\ &\cong (1-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})Z(1+it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}) \\ &\cong (Z-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}Z+itZ\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}) \\ &= Z+it[Z,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}] \\ Z^\dagger &\to e^{-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}}Z^\dagger e^{it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}} \\ &\cong (1-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})Z^\dagger(1+it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}) \\ &\cong (Z^\dagger-it\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}Z^\dagger+itZ^\dagger\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}) \\ &= Z^\dagger+it[Z^\dagger,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}] \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\frac{dZ}{dt}=i[Z,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}],\ \frac{dZ^\dagger}{dt}=i[Z^\dagger,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}]$$

である。成分 z_{ij} ごとについてみれば、これは

$$\frac{dz_{ij}}{dt}=i[z,(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})]_{ij}=iz_{ik}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{kj}-i(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{ik}z_{kj}$$
$$\frac{d\bar{z}_{ij}}{dt}=i[\bar{z},(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})]_{ij}=i\bar{z}_{ik}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{kj}-i(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{ik}\bar{z}_{kj}$$

である。これより、今回の tangent vector field は

$$X_z=\frac{dz_{ij}}{dt}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}+\frac{d\bar{z}_{ij}}{dt}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{ji}}$$

であり、これが Hamiltonian vector field

$$X_{\mu_z}=\frac{\partial\mu_z}{\partial\bar{z}_{ij}}\frac{\partial}{\partial z_{ji}}-\frac{\partial\mu_z}{\partial z_{ij}}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{ji}}$$

と等しいためには、言い換えれば $\omega(X_z,\cdot)=d\mu_z$ となるためには

$$\frac{\partial\mu_z}{\partial\bar{z}_{ij}}=i[z,(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})]_{ij}=iz_{ik}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{kj}-i(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{ik}z_{kj}$$
$$\frac{\partial\mu_z}{\partial z_{ij}}=-i[\bar{z},(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})]_{ij}=-i\bar{z}_{ik}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{kj}+i(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{ik}\bar{z}_{kj}$$

となることが必要である。これより moment map μ_z は

$$\begin{aligned} \mu_z &= i\bar{z}_{ij}z_{jk}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{ki}-i\bar{z}_{ij}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})_{jk}z_{ki} \\ &= i\mathrm{Tr}\left(Z^\dagger[Z,(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})]\right) \\ &= i\mathrm{Tr}\left([Z^\dagger,Z](\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau})\right) \end{aligned}$$

となる。あるいは、moment map は３つ出てきて、それぞれ

$$(\mu_z)_1=i\mathrm{tr}\left([Z,Z^\dagger]\tau_1\right)$$
$$(\mu_z)_2=i\mathrm{tr}\left([Z,Z^\dagger]\tau_2\right)$$
$$(\mu_z)_3=i\mathrm{tr}\left([Z,Z^\dagger]\tau_3\right)$$

である。まとめて書けば、

$$\mu=\mu_a\tau_a=\frac{i}{2}[Z,Z^\dagger]$$

であることがわかる。

しかし、以上の方法で計算するのは今後の議論では少々煩雑な作業である。ここで後の議論に役立つということもあるので、成分に分解しないままの方法で上の式を導いておこう。そうすれば、それは SU(2) gauge 場に限らずもっと一般的な群に適用して考えることも容易に出来る。そのとき、まず vector field X_zは

$$\begin{aligned} X_z &= \mathrm{tr}\left(\frac{dZ}{dt}\frac{\partial}{\partial Z}+\frac{dZ^\dagger}{dt}\frac{\partial}{\partial Z^\dagger}\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(i[Z,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}]\frac{\partial}{\partial Z}+i[Z^\dagger,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}]\frac{\partial}{\partial Z^\dagger}\right) \end{aligned}$$

と表すことができる。これと symplectic 2-form

$$\omega=\frac{i}{2}\mathrm{tr}(dZ\wedge dZ^\dagger)$$

との interior product を作ると

$$
\begin{aligned}
&\omega(X_z,\cdot)\\
&=\frac{i}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{dZ}{dt}dZ^\dagger-\frac{dZ^\dagger}{dt}dZ\right)\\
&=\frac{i}{2}\mathrm{tr}\left(i[Z,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}]dZ^\dagger-i[Z^\dagger,\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}]dZ\right)\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}ZdZ^\dagger-Z\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}dZ^\dagger+Z^\dagger\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}dZ-\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}Z^\dagger dZ)\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{(ZdZ^\dagger-dZ^\dagger Z+dZZ^\dagger-Z^\dagger dZ)\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{(d(ZZ^\dagger)-d(Z^\dagger Z))\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{d([Z,Z^\dagger])\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}\right\}\\
&=\frac{1}{2}d\left(\mathrm{tr}\left\{i[Z,Z^\dagger]i\vec{\epsilon}\cdot\vec{\tau}\right\}\right)\\
&\equiv d\langle\mu,\zeta\rangle\qquad(\mu:\text{moment map},\ \zeta\in\mathfrak{g}^*)
\end{aligned}
$$

となり、

$$\mu=\mu_a\tau_a=\frac{i}{2}[Z,Z^\dagger]$$

であることを導くことができる。

次に、ここでこの moment map についての symplectic quotient の空間の自由度（次元）について考えておこう。元の空間の自由度から moment map の値を固定することによって３つの自由度が減り、更に G で変換される自由度を３つ落とすことになる。もともと Z の自由度が８だったので、この場合の symplectic quotient の自由度は２となることが分かる。即ち symplectic quotient は２次元空間になる。（ただし、この２次元空間が元の変数 Z を使って、具体的にどのように表されるかはまだ確認していない。）

ここまでは Z の張る空間、即ち $M(2,\mathbb{C})$ について考察してきたが、この議論を gauge field の空間に拡張するために、complex ２×２行列の空間 $M(2,\mathbb{C})$ の代わりに、SU(2) の algebra $\mathfrak{su}(2)$ が張る空間と同じ自由度を持つ空間、即ち、$u=A_0+iA_1$ $(A_\mu=A_\mu^a\tau^a)$ という空間についても考察しておく。この空間への群 SU(2) の作用は形の上では Z に対するものと同じなので、moment map は $\mu=\frac{i}{2}[u,\bar{u}]$ であることがわかる。しかし、u の自由度は３×２＝６なので、この場合の symplectic quotient の自由度は０、つまり１点の空間となり、trivial な空間である。しかし、これを本当の２次元 gauge 場の空間に適用する場合の議論においては、この変数に座標依存性を与え無限次元空間に拡張する。このことにより、各座標軸方向（即ち、座標の値）ごとに１点に縮約された空間が無限個の点の集まりとなり、ひとつの manifold が得られると考えることが出来るものと考えられる。

さて、準備が整ったのでここまでの議論を複素数から quaternion（四元数）に拡張して、４次元の話に適用してみよう。即ち、M＝$M(n,\mathbb{H})$とする。この M の張る空間を hyperkähler manifold という。一般に hyperkähler manifold は、次のように定義される。：

多様体 X 上に metric g が定義されていて、３つの複素構造 I_1,I_2,I_3 があり、次の条件を満たすものを考える。

- g は各 I_i に関して Kähler である，即ち

$$\omega_i(v,w)=g(I_iv,w)\ (i=1,2,3)$$

- I_1,I_2,I_3 は quaternion の関係式を満たす。即ち

$$I_1I_2=-I_2I_1=I_3$$

この条件が満たされているものを hyperkähler manifold という。

hyperkähler manifold 上の moment map がどのように与えられるかについては、通常次のような議論で示される。hyperkähler manifold の座標を一般的に

$$B=B_0+iB_1+jB_2+kB_3$$
$$(B_\alpha\in M(n,\mathbb{R}))$$

で表すことにする。ここで、i,j,k は quaternion の基本単位であり、$i^2=j^2=k^2$

$=-1,\ ij=k, jk=i, ki=j$ を満たすものである。B に対しては $\mathrm{Sp}(n)$ 群（$\mathrm{U}(n,\mathbb{H})$ 群）が作用する。またB は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} B &= (B_0+iB_1)+k(B_3+iB_2) \\ &= (B_0+jB_2)+i(B_1+jB_3) \\ &= (B_0+kB_3)+j(B_2+kB_1) \end{aligned}$$

すると、例えば１行目の式を

$$B = Z + kW$$

と表すことができて、Z, W に対してはそれぞれ $\mathrm{U}(n)$が adjoint に作用することになる。つまり、この群作用によって得られる moment map は Kähler のときの結果から類推すれば

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{i}{2}[Z,Z^\dagger]+\frac{i}{2}[W,W^\dagger] \\ &= [B_2,B_3]-[B_0,B_1] \end{aligned}$$

であることが分かる。同じことは、２行目、３行目の式についても言えるので、結局３つの moment map

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -[B_0,B_1]+[B_2,B_3] \\ \mu_2 &= -[B_0,B_2]+[B_3,B_1] \\ \mu_3 &= -[B_0,B_3]+[B_1,B_2] \end{aligned}$$

が得られるという訳である。

しかし、今後の議論のためにもう少し詳しい計算からこの結果を示して置くことにしよう。

phase space を

$$\begin{aligned} B = B_0 &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - iB_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &- iB_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - iB_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書くことにする。ここで

$$\boldsymbol{i} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{j} = -i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k} = -i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,$$

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}$$

を満たすことが容易に分かるので、これは quaternion の基本単位と見ることができて、所謂 hyperkähler 空間を形成している。つまりそこには３つの hyperkahler 2-form

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dB_0\wedge dB_1 + dB_2\wedge dB_3 \\ \omega_2 &= dB_0\wedge dB_2 + dB_3\wedge dB_1 \\ \omega_3 &= dB_0\wedge dB_3 + dB_1\wedge dB_2 \end{aligned}$$

が存在する。これらの2-form は、M上に $\mathrm{SU}(n)$ 群が

$$B_\mu \to g^{-1}B_\mu g \quad (\mu = 0,1,2,3)$$

と作用しても不変である。そこで、この作用に伴う tangent vector field Xを考える。そうすれば、３つの 2-form ω_a とXの interior product を作ることにより$\omega_a(X,\cdot) = d\mu_a$ ということが示されるはずであり、３つの moment map μ_1,μ_2,μ_3 が得られるはずである。そこで、まず X を作ると、それは

$$X = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\left(e^{-is\Lambda}B_\mu e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial B_\mu} = i[B_\mu,\Lambda]\frac{\partial}{\partial B_\mu}$$

と書くことができる。これを用いて $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ との interior product を求めると

$$\omega_1(X,\cdot) = \mathrm{tr}\,\{i[B_0,\Lambda]dB_1 - i[B_1,\Lambda]dB_0 + i[B_2,\Lambda]dB_3 - i[B_3,\Lambda]dB_2\}$$
$$\omega_2(X,\cdot) = \mathrm{tr}\,\{i[B_0,\Lambda]dB_2 - i[B_2,\Lambda]dB_0 + i[B_3,\Lambda]dB_1 - i[B_1,\Lambda]dB_3\}$$
$$\omega_3(X,\cdot) = \mathrm{tr}\,\{i[B_0,\Lambda]dB_3 - i[B_3,\Lambda]dB_0 + i[B_1,\Lambda]dB_2 - i[B_2,\Lambda]dB_3\}$$

となる。さらに、例えば $\omega_1(X,\cdot)$ の中から Λ をくくり出してもう少し整理してみると

$$\begin{aligned}\omega_1(X,\cdot) &= i\mathrm{tr}\,\{(dB_1A_0 - B_0dB_1 - dB_0B_1 + B_1dB_0 \\ &\quad + dB_3B_2 - B_2dB_3 - dB_2B_3 + B_3dB_2)\,\Lambda\} \\ &= i\mathrm{tr}\,\{d\,([B_1,B_0] + [B_3,B_2])\,\Lambda\}\end{aligned}$$

となることが分かる。同様にして $\omega_2(X,\cdot)$, $\omega_3(X,\cdot)$ についても求めることができて、結局 moment map の定義から

$$\mu_1 = i[B_1,B_0] + i[B_3,B_2]$$
$$\mu_2 = i[B_2,B_0] + i[B_1,B_3]$$
$$\mu_3 = i[B_3,B_0] + i[B_2,B_1]$$

が得られる。

ここでも Kähler のときと同じように symplectic quotient の空間の自由度を考えると、$M(2,\mathbb{H})$ の場合は 16 の自由度があって moment map 3 つから 3 × 3 = 9 の自由度が減り、さらに SU(2) の自由度 3 つを落とせば 4 つの自由度が残って 4 次元空間となることが分かる。一方、gauge field の phase space の場合、symplectic reduction を考えると、もとは 3 × 4 =12 の自由度しかないので、やはり Kähler のときと同じように自由度は 0 となり、1 点に縮約されることがわかる。しかし、次節以降の議論で見るように、4 次元空間の座標依存性を与え、無限次元の phase space を考えると、その点の集まりが一つの symplectic manifold を形成することになる。

3.2. Moment Map としての Nahm 方程式

前節の結果を踏まえ、ここから具体的に 4 次元空間の gauge 場について考えよう。4 次元空間における gauge 場を A_0, A_1, A_2, A_3, とする。まず、それらが時間 $(x_0 = t)$ のみに依存する関数であると仮定する場合から始めよう。すると $A_\mu(t)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ の張る無限次元空間は無限次元 hyperkähler 空間と見做すことができて、その空間上の 1 点は、quaternion

$$A = A_0(t) + iA_1(t) + jA_2(t) + kA_3(t)$$

で表すことができる。即ち、2 次元のときと同じ t を無限次元空間の座標軸を表す添字と考える。すると、そこには 3 つの symplectic（hyperkähler）構造（form）を導入することが可能であって、上式を

$$\begin{aligned}A &= (A_0 + iA_1) + k(A_3 + iA_2) \\ &= (A_0 + jA_2) + i(A_1 + jA_3) \\ &= (A_0 + kA_3) + j(A_2 + kA_1)\end{aligned}$$

と表すことができるので、これらに伴って 2-form は前節の結果から

$$\omega_1 = \mathrm{tr}\int dt[dA_0 \wedge dA_1 + dA_2 \wedge dA_3]$$
$$\omega_2 = \mathrm{tr}\int dt[dA_0 \wedge dA_2 + dA_3 \wedge dA_1]$$
$$\omega_3 = \mathrm{tr}\int dt[dA_0 \wedge dA_3 + dA_1 \wedge dA_2]$$

の 3 種類で表されることが容易に分かる。これらの 2-form は、M 上に SU(n) 群が

$$A_0 \to g^{-1}A_0g + ig^{-1}\frac{dg}{dt}$$
$$A_i \to g^{-1}A_ig \quad (i = 1,2,3)$$

と作用しても不変である。そこで、この作

用に伴う tangent vector field Xを考える。そうすれば、３つの form ω_aとXの interior product を作るとそれらは$\omega_a(X,\cdot)=d\mu_a$と表されるはずであり、それにより３つの moment map μ_1,μ_2,μ_3が得られるはずである。そこで、まずXを作ると、それは

$$\begin{aligned}
&X\\
&=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left(e^{-is\Lambda(t)}A_0(t)e^{is\Lambda(t)}+ie^{-is\Lambda(t)}\frac{d}{dt}e^{is\Lambda(t)}\right)\frac{\partial}{\partial A_0}\\
&\quad+\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}e^{-is\Lambda(t)}A_i(t)e^{is\Lambda(t)}\frac{\partial}{\partial A_i}\\
&=\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{d\Lambda}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial A_0}+i[A_i,\Lambda]\frac{\partial}{\partial A_i}
\end{aligned}$$

と書くことができる。これを用いて$\omega_1,\omega_2,\omega_3$との interior product を求めると

$$\begin{aligned}
\omega_1(X,\cdot)&=\mathrm{tr}\int dt\Bigg\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{d\Lambda}{dt}\right)dA_1\\
&\qquad-i[A_1,\Lambda]dA_0+i[A_2,\Lambda]dA_3-i[A_3,\Lambda]dA_2\Bigg\}\\
\omega_2(X,\cdot)&=\mathrm{tr}\int dt\Bigg\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{d\Lambda}{dt}\right)dA_2\\
&\qquad-i[A_2,\Lambda]dA_0+i[A_3,\Lambda]dA_1-i[A_1,\Lambda]dA_3\Bigg\}\\
\omega_3(X,\cdot)&=\mathrm{tr}\int dt\Bigg\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{d\Lambda}{dt}\right)dA_3\\
&\qquad-i[A_3,\Lambda]dA_0+i[A_1,\Lambda]dA_2-i[A_2,\Lambda]dA_3\Bigg\}
\end{aligned}$$

となる。さらに、例えばここで$\omega_1(X,\cdot)$について部分積分を用いてもう少し整理してみると

$$\begin{aligned}
&\omega_1(X,\cdot)\\
&=\mathrm{tr}\int dt\Bigg\{d\left(\frac{d}{dt}A_1\right)\Lambda\\
&\quad+i\left(dA_1A_0-A_0dA_1-dA_0A_1+A_1dA_0\right)\\
&\quad+\left(dA_3A_2-A_2dA_3-dA_2A_3+A_3dA_2\right)\Lambda\Bigg\}\\
&=\mathrm{tr}\int dt\Bigg\{d\left(\frac{d}{dt}A_1+i[A_1,A_0]+i[A_3,A_2]\right)\Lambda\Bigg\}
\end{aligned}$$

となることが分かる。同様にして$\omega_2(X,\cdot)$, $\omega_3(X,\cdot)$についても求めてみると、結局

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}A_1+i[A_1,A_0]+i[A_3,A_2]\\
&\frac{d}{dt}A_2+i[A_2,A_0]+i[A_1,A_3]\\
&\frac{d}{dt}A_3+i[A_3,A_0]+i[A_2,A_1]
\end{aligned}$$

が３つの moment map であることが分かる。もしこれらを同時に０と置くとすれば、それらはまさに Nahm 方程式と呼ばれる方程式である。

3.3. Hyperkähler Quotient

次に、上で求めた moment map が一定の値に固定されたときの symplectic（hyperkähler）quotient を考えてみよう。まず、上で示したように３つの moment map

$$\begin{aligned}
\mu_1&=\frac{d}{dt}A_1+i[A_1,A_0]+i[A_3,A_2]\\
\mu_2&=\frac{d}{dt}A_2+i[A_2,A_0]+i[A_1,A_3]\\
\mu_3&=\frac{d}{dt}A_3+i[A_3,A_0]+i[A_2,A_1]
\end{aligned}$$

を０に固定する。これらは所謂 Nahm 方程式であり、従って、Nahm 方程式の解の moduli 空間は

$$\mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_0=(\mu_1^{-1}(0)\cap\mu_2^{-1}(0)\cap\mu_3^{-1}(0))/\mathcal{G}_0$$

と表される。この空間は symplectic quotient ではないが、hyperkähler quotient というものになっている。hyperkähler quotient は hyperkähler 多様体になることが知られている。

では、具体的に hyperkähler quotient、即ち Nahm 方程式を満たす gauge 場の moduli 空間は、どのような空間になるだろうか。例えば$A=A_0+iA_1+jA_2+kA_3$を

$$(B_0,B_1):=(A_0+iA_1,A_2+iA_3)$$

のように組んで $\mathcal{A} = C^\infty(I;\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\oplus 2}$ と見做す。（もちろん、(B_0,B_1) の組み方は３通りあるが）(B_0,B_1) を基本的な場の変数とすると、これに対する symplectic 2-form は $\omega_\mathbb{C} = \mathrm{tr}\int dt dB_0 \wedge dB_1$ ということになるが、これはもとの2-form とは

$$\begin{aligned}\omega_\mathbb{C} &= \mathrm{tr}\int dt dB_0 \wedge dB_1 \\ &= \mathrm{tr}\int dt (dA_0 + i dA_1) \wedge (dA_2 + i dA_3) \\ &= \mathrm{tr}\int dt [(dA_0 \wedge dA_2 + dA_3 \wedge dA_1) \\ &\qquad + i\,(dA_0 \wedge dA_3 + dA_1 \wedge dA_2)] \\ &= \omega_2 + i\omega_3\end{aligned}$$

という関係である。また、この 2-form を不変に保つ群作用は $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ ということになる。もともと $\mathcal{A}$ に対して群は

$$\begin{aligned}A_0 &\to g^{-1}A_0 g + i g^{-1}\frac{dg}{dt} \\ A_i &\to g^{-1}A_i g\end{aligned}$$

のように作用していたから、(B_0,B_1) に対しては $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ は

$$g : (B_0,B_1) \mapsto \left(gB_0g^{-1} - \frac{dg}{dt}g^{-1}, gB_1g^{-1}\right)$$

のように作用することがわかる。これを見ると (B_0,B_1) は、あたかも２次元のときの (A_0,A_1) に $\mathcal{G}$ が作用しているときと同じ形になっていることがわかる。したがって、この場合の moment map は

$$\mu_\mathbb{C} = \frac{d}{dt}B_1 + i[B_1,B_0]$$

となることは明らかである。

一方、

$$\begin{aligned}&\mu_2 + i\mu_3 \\ &= \frac{d}{dt}(A_2 + iA_3) + i[A_2 + iA_3, A_0] - [A_2 + iA_3, A_1] \\ &= \frac{d}{dt}(A_2 + iA_3) + i[A_2 + iA_3, A_0] + i[iA_2 - A_3, A_1] \\ &= \frac{d}{dt}(A_2 + iA_3) + i[A_2 + iA_3, A_0] + i[A_2 + iA_3, iA_1] \\ &= \frac{d}{dt}(A_2 + iA_3) + i[A_2 + iA_3, A_0 + iA_1] \\ &= \frac{d}{dt}B_1 + i[B_1,B_0]\end{aligned}$$

となっているので、$\mu_\mathbb{C} = \mu_2 + i\mu_3$ であることが分かる。つまり、(B_0,B_1) の manifold に $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ が作用するということは、$A = A_0 + iA_1 + jA_2 + kA_3$ の manifold に $\mathcal{G}$ が（特に今の場合は ω_2, ω_3 を不変に保つように）作用するということと同じになっているということである。

ところで、上で見たように、moment map は２次元の flat connection の場合の moment map と形式的には全く同じものになっていて、異なっているのは複素化されているという点だけなので、(B_0,B_1) に $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ が作用することによる symplectic quotient は、

$$\mu_\mathbb{C}^{-1}(0)/(\mathcal{G}_0)_\mathbb{C} \cong T^*G_\mathbb{C}$$

であり、これが hyperkähler 多様体である。

3.4. Moment Map としての Hitchin 方程式

次にもう一つ座標依存性の数を増やしてみよう。以下に示すように、その場合の moment map は所謂 Hitchin 方程式と呼ばれるものになることが分かる。Hitchin 方程式とは、２次元空間における gauge 場と Higgs 場が満たす self-dual equation のことで

$$\begin{aligned}&F_{z\bar{z}} + [\Phi, \bar{\Phi}] = 0 \\ &D_z\bar{\Phi} = 0 \\ &D_{\bar{z}}\Phi = 0\end{aligned}$$

で表される。これは、４次元空間の self-dual equation において、２つの座標依存性を取り除き、gauge 場のうちの２つを Higgs 場と identify することによって得られることが分かっている。しかし、これも前節の Nahm 方程式と同様、ある与えられた位相空間に対して群が作用することにより定義される moment map として導き出されるものと考えることが出来る。

Hitchin 方程式を moment map として導き出す方法は Nahm 方程式を moment map として導き出したときの方法と全く変わらない。Nahm 方程式のときは、実空間の座標依存性をtひとつにしていたのに対し、Hitchin 方程式を導き出す場合は座標依存性をもうひとつ増やして議論するだけのことである。即ち、依存する座標を $x_0(=t), x_1(=x)$ とする。これは２次元の gauge 理論のときに述べたように、無限次元位相空間の座標軸の番号を表すパラメータを２つに増やしただけだと考えればよい。つまり、２次元空間の各点が無限次元空間の座標軸を表す番号になっていると考えればよいということである。すると、gauge 群の作用に関わる moment map は Nahm 方程式が Hitchin 方程式にとって代わることになる。

後で gauge field のうち２つを Higgs field と見做すことになるが、とりあえずは gauge field はすべて A_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ で表したままで議論を進めていく。そして、最後に２つの gauge field を Higgs field に定義し直すという手順をとることにする。すると、symplectic 2-form は積分すべき変数の数、即ち無限次元空間の座標軸の和は増えるが、Nahm 方程式を導き出したときと同じように

$$\omega_1 = \mathrm{tr}\int dtdx\,[dA_0 \wedge dA_1 + dA_2 \wedge dA_3]$$

$$\omega_2 = \mathrm{tr}\int dtdx\,[dA_0 \wedge dA_2 + dA_3 \wedge dA_1]$$

$$\omega_3 = \mathrm{tr}\int dtdx\,[dA_0 \wedge dA_3 + dA_1 \wedge dA_2]$$

と定義することができる。今回の座標依存性は $x_0(=t), x_1(=x)$ の２つなので、gauge field に対して群 $G(=\mathrm{U}(n))$ は

$$\begin{aligned}
A_0 &\to g^{-1}A_0 g + ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial t}\\
A_1 &\to g^{-1}A_1 g + ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}\\
A_2 &\to g^{-1}A_2 g\\
A_3 &\to g^{-1}A_3 g
\end{aligned}$$

のように作用する。その結果、この作用による tangent vector field X は

$$\begin{aligned}
&X\\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\left\{\left(e^{-is\Lambda}A_0 e^{is\Lambda} + ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial t}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_0}\right.\\
&\quad + \left(e^{-is\Lambda}A_1 e^{is\Lambda} + ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}\\
&\quad \left. + e^{-is\Lambda}A_2 e^{is\Lambda}\frac{\partial}{\partial A_2} + e^{-is\Lambda}A_3 e^{is\Lambda}\frac{\partial}{\partial A_3}\right\}\\
&= \left(i[A_0,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial A_0} + \left(i[A_1,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}\\
&\quad + i[A_2,\Lambda]\frac{\partial}{\partial A_2} + i[A_3,\Lambda]\frac{\partial}{\partial A_3}
\end{aligned}$$

と表される。次に、これと上で定義した３つの $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ との interior product を作る。まず ω_1 との interior product は

$$\begin{aligned}
&\omega_1(X,\cdot)\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{\left(i[A_0,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)dA_1\right.\\
&\quad - \left(i[A_1,\Lambda] - \frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)dA_0\\
&\quad \left. + i[A_2,\Lambda]dA_3 - i[A_3,\Lambda]dA_2\right\}\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\Lambda - d\left(\frac{\partial A_0}{\partial x}\right)\Lambda\right.\\
&\quad + i\left(dA_1A_0 - A_0dA_1 - dA_0A_1 + A_1dA_0\right.\\
&\quad \left.\left. + dA_3A_2 - A_2dA_3 - dA_2A_3 + A_3dA_2\right)\Lambda\right\}\\
&= \mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x} + i[A_1,A_0] + i[A_3,A_2]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}$$

となり、同様に ω_2, ω_3 との interior product についても

$$
\begin{aligned}
&\omega_2(X,\cdot)\\
=&\mathrm{tr}\int dtdx\left\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)dA_2\right.\\
&-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)dA_3\\
&\left.-i[A_2,\Lambda]dA_0+i[A_3,\Lambda]dA_1\right\}\\
=&\mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_2}{\partial t}-\frac{\partial A_3}{\partial x}+i[A_2,A_0]+i[A_1,A_3]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_3(X,\cdot)\\
=&\mathrm{tr}\int dtdx\left\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)dA_3\right.\\
&-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\right)dA_2\\
&\left.-i[A_2,\Lambda]dA_1-i[A_3,\Lambda]dA_0\right\}\\
=&\mathrm{tr}\int dtdx\left\{d\left(\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial A_3}{\partial x}+i[A_3,A_0]+i[A_2,A_1]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる。したがって、それぞれから得られる moment map μ_1, μ_2, μ_3 は

$$
\begin{aligned}
\mu_1&=\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial A_0}{\partial x}+i[A_1,A_0]+i[A_3,A_2]\\
\mu_2&=\frac{\partial A_2}{\partial t}-\frac{\partial A_3}{\partial x}+i[A_2,A_0]+i[A_1,A_3]\\
\mu_3&=\frac{\partial A_3}{\partial t}+\frac{\partial A_2}{\partial x}+i[A_3,A_0]+i[A_2,A_1]
\end{aligned}
$$

となる。ここで、座標を

$$
\begin{aligned}
&z=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+ix),\ \bar{z}=\frac{1}{\sqrt{2}}(t-iz),\\
&\partial_z=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t-i\partial_x),\ \partial_{\bar{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_t+i\partial_x),
\end{aligned}
$$

と再定義し、それに伴って gauge 場も

$$
\begin{aligned}
&A_z=A_0-iA_1,\ A_{\bar{z}}=A_0+iA_1,\\
&\Phi=A_2-iA_3,\ \bar{\Phi}=A_2+iA_3,
\end{aligned}
$$

と定義しなおすと、例えば μ_1は

$$
\mu_1=F_{z\bar{z}}+[\Phi,\bar{\Phi}]
$$

であることは明らかである。また、μ_2, μ_3 については $\mu_\pm\equiv\mu_2\pm i\mu_3$ とすると

$$
\begin{aligned}
\mu_2&=\left(\frac{\partial A_2}{\partial t}-i[A_0,A_2]\right)-\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}-i[A_1,A_3]\right)\\
&\equiv D_tA_2-D_xA_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_3&=\left(\frac{\partial A_3}{\partial t}-i[A_0,A_3]\right)+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-i[A_1,A_2]\right)\\
&\equiv D_tA_3+D_xA_2
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\mu_+&=D_t(A_2+iA_3)+D_x(-A_3+iA_2)\\
&=(D_t+iD_x)(A_2+iA_3)\\
&=D_{\bar{z}}\Phi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_-&=D_t(A_2-iA_3)-D_x(A_3+iA_2)\\
&=(D_t-iD_x)(A_2-iA_3)\\
&=D_z\bar{\Phi}
\end{aligned}
$$

となり、$\mu_1=0, \mu_\pm=0$ は、Hitchin 方程式であることが分かる。

3.5. Moment Map としての BPS 方程式

ここまでくると、座標依存性の数を増やしたところで大きな問題は無いようにみえる。そこで、もう一つ空間座標の依存性を増やしてみる。即ち、空間座標依存性を３つにして、gauge 場 A_μ $(\mu=0.1.2.3)$ が x_1, x_2, x_3 に依存していて x_0 方向は constant であるとする。まず

$$
\begin{aligned}
\omega_1&=\mathrm{tr}\int dV\,[dA_0\wedge dA_1+dA_2\wedge dA_3]\\
\omega_2&=\mathrm{tr}\int dV\,[dA_0\wedge dA_2+dA_3\wedge dA_1]\\
\omega_3&=\mathrm{tr}\int dV\,[dA_0\wedge dA_3+dA_1\wedge dA_2]
\end{aligned}
$$

とする。ただし、$dV=dx_1dx_2dx_3$ である。

また今回、群 $G(=\mathrm{U}(n))$ は $A_\mu\,(\mu=0,1,2,3)$ に対して、

$$A_0 \to g^{-1}A_0 g$$
$$A_i \to g^{-1}A_i g + ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

のように作用することになる。その結果、この作用による tangent vector field X は

$$\begin{aligned}
X =& \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\Bigg\{e^{-is\Lambda}A_0 e^{is\Lambda}\frac{\partial}{\partial A_0} \\
&+\left(e^{-is\Lambda}A_1 e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_1}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_1} \\
&+\left(e^{-is\Lambda}A_2 e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_2}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_2} \\
&+\left(e^{-is\Lambda}A_3 e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_3}\Bigg\} \\
=& i[A_0,\Lambda]\frac{\partial}{\partial A_0}+\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial A_1} \\
&+\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial A_2} \\
&+\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial A_3}
\end{aligned}$$

と表される。次に、これと上で定義した３つの $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ との interior product を作る。まず ω_1 との interior product は

$$\begin{aligned}
&\omega_1(X,\cdot) \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{\{i[A_0,\Lambda]dA_1 \\
&-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_0 \\
&+\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_3 \\
&-\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_2\Bigg\} \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{-d\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_1}\right)\Lambda+d\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)\Lambda-d\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\Lambda \\
&+i\left(dA_1A_0-A_0dA_1-dA_0A_1+A_1dA_0\right. \\
&\left.+dA_3A_2-A_2dA_3-dA_2A_3+A_3dA_2\right)\Lambda\Bigg\} \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{d\left(-\frac{\partial A_0}{\partial x_1}+i[A_1,A_0]\right. \\
&\left.+\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}+i[A_3,A_2]\right)\Lambda\Bigg\}
\end{aligned}$$

となり、同様に ω_2,ω_3 との interior product についても

$$\begin{aligned}
&\omega_2(X,\cdot) \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{i[A_0,\Lambda]dA_2-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_3 \\
&-\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_0+\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_1\Bigg\} \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{d\left(-\frac{\partial A_0}{\partial x_2}+i[A_2,A_0]\right. \\
&\left.+\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}+i[A_1,A_3]\right)\Lambda\Bigg\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega_3(X,\cdot) \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{i[A_0,\Lambda]dA_3+\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_2 \\
&-\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_1-\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_0\Bigg\} \\
=&\mathrm{tr}\int dV\Bigg\{d\left(-\frac{\partial A_0}{\partial x_3}+i[A_3,A_0]\right. \\
&\left.+\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+i[A_2,A_1]\right)\Lambda\Bigg\}
\end{aligned}$$

が得られる。以上から３つの moment map は

$$\mu_1 = -\frac{\partial A_0}{\partial x_1} + i[A_1, A_0] + \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} + i[A_3, A_2]$$
$$\mu_2 = -\frac{\partial A_0}{\partial x_2} + i[A_2, A_0] + \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} + i[A_1, A_3]$$
$$\mu_3 = -\frac{\partial A_0}{\partial x_3} + i[A_3, A_0] + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} + i[A_2, A_1]$$

となることが分かる。これが何を表しているかは明らかである。例えば、３＋１次元空間の Yang-Mills-Higgs model

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi D_\mu\phi - \frac{1}{4}\mathrm{tr}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - V(\phi)$$
$$\left(V(\phi) = \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - 1)^2\right)$$

において、static な system、即ち３次元的な finite energy system を考えると

$$E = \int d^3x \left[|D^i\phi|^2 + \frac{1}{4}|F^{ij}|^2 + V(\phi)\right] \geqq \int d^3x \left[|D_i\phi|^2 + \frac{1}{4}|F_{ij}|^2\right]$$

である。ところで、自明な不等式

$$\left(D_i\phi \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}\right)^2 \geqq 0$$

より

$$D_i\phi|^2 + \frac{1}{4}|F_{jk}|^2 \geqq \pm\epsilon_{ijk}D_i\phi F_{jk}$$

という不等式が得られるので、

$$E = \int d^3x \left[|D^i\phi|^2 + \frac{1}{4}|F^{ij}|^2 + V(\phi)\right] \geqq \pm\int d^3x\epsilon_{ijk}D_i\phi F_{jk} = \pm g$$

不等式の右辺は topological number であり、g は monopole charge である。即ち

$$D_i\phi \pm \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk} = 0$$

が最低エネルギー状態を与える BPS bound の方程式であり、BPS equation と呼ばれているものである。

話を戻して、先ほど得られた moment map と BPS equation を見比べてみる。moment map の式の中で A_0 を ϕ に置き換えると、μ_1, μ_2, μ_3 それぞれの式の初めの２項は ϕ の covariant derivative $D_1\phi, D_2\phi, D_3\phi$ であり、残りの２項は field strength $\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$ となっていることがわかる。これはまさに BPS equation そのものである。つまり、BPS equation は、３次元の static な gauge 場を無限次元 phase space と考えたときの moment map であるということができる。

3.6. Moment Map としての（Anti）Self-dual Equation

更に座標依存性を full に４つ (x_0, x_1, x_2, x_3) とする。symplectic 2-form は相変わらず

$$\omega_1 = \mathrm{tr}\int dV\,[dA_0 \wedge dA_1 + dA_2 \wedge dA_3]$$
$$\omega_2 = \mathrm{tr}\int dV\,[dA_0 \wedge dA_2 + dA_3 \wedge dA_1]$$
$$\omega_3 = \mathrm{tr}\int dV\,[dA_0 \wedge dA_3 + dA_1 \wedge dA_2]$$

とすることができる。ただし、$dV = dx_0dx_1dx_2dx_3$ である。また今回、群 G $(= \mathrm{U}(n))$ は A_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ すべてに対して、

$$A_\mu \to g^{-1}A_\mu g + ig^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}$$

のように作用することになる。その結果、この作用による tangent vector field X は

$$
\begin{aligned}
X=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}&\left\{\left(e^{-is\Lambda}A_0e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_0}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_0}\right.\\
&+\left(e^{-is\Lambda}A_1e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_1}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}\\
&+\left(e^{-is\Lambda}A_2e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_2}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_2}\\
&\left.+\left(e^{-is\Lambda}A_3e^{is\Lambda}+ie^{-is\Lambda}\frac{\partial}{\partial x_3}e^{is\Lambda}\right)\frac{\partial}{\partial A_3}\right\}\\
=&\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}\right)\frac{\partial}{\partial A_0}+\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial A_1}\\
&+\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)\frac{\partial}{\partial A_2}\\
&+\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)\frac{\partial}{\partial A_3}
\end{aligned}
$$

と表される。次に、これと上で定義した３つの $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ との interior product を作る。まず ω_1 との interior product は

$$
\begin{aligned}
&\omega_1(X,\cdot)\\
=&\mathrm{tr}\int dV\left\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}\right)dA_1\right.\\
&\quad-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_0\\
&\quad+\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_3\\
&\quad\left.-\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_2\right\}\\
=&\mathrm{tr}\int dV\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_0}\right)\Lambda-d\left(\frac{\partial A_0}{\partial x_1}\right)\Lambda\right.\\
&\quad+d\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)\Lambda-d\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)\Lambda\\
&\quad+i\left(dA_1A_0-A_0dA_1-dA_0A_1+A_1dA_0\right.\\
&\quad\left.\left.+dA_3A_2-A_2dA_3-dA_2A_3+A_3dA_2\right)\Lambda\right\}\\
=&\mathrm{tr}\int dV\left\{d\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_1}+i[A_1,A_0]\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}+i[A_3,A_2]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}
$$

となり、同様に ω_2,ω_3 との interior product についても

$$
\begin{aligned}
&\omega_2(X,\cdot)\\
&=\mathrm{tr}\int dV\left\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}\right)dA_2\right.\\
&\quad-\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_3\\
&\quad-\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_0\\
&\quad\left.+\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_1\right\}\\
&=\mathrm{tr}\int dV\left\{d\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_2}+i[A_2,A_0]\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}+i[A_1,A_3]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_3(X,\cdot)\\
&=\mathrm{tr}\int dV\left\{\left(i[A_0,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_0}\right)dA_3\right.\\
&\quad+\left(i[A_1,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)dA_2\\
&\quad-\left(i[A_2,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)dA_1\\
&\quad\left.-\left(i[A_3,\Lambda]-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3}\right)dA_0\right\}\\
&=\mathrm{tr}\int dV\left\{d\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_3}+i[A_3,A_0]\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+i[A_2,A_1]\right)\Lambda\right\}
\end{aligned}
$$

が得られる。以上から３つの moment map は

$$
\begin{aligned}
\mu_1&=\frac{\partial A_1}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_1}+i[A_1,A_0]\\
&\quad+\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}+i[A_3,A_2]\\
\mu_2&=\frac{\partial A_2}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_2}+i[A_2,A_0]\\
&\quad+\frac{\partial A_1}{\partial x_3}-\frac{\partial A_3}{\partial x_1}+i[A_1,A_3]\\
\mu_3&=\frac{\partial A_3}{\partial x_0}-\frac{\partial A_0}{\partial x_3}+i[A_3,A_0]\\
&\quad+\frac{\partial A_2}{\partial x_1}-\frac{\partial A_1}{\partial x_2}+i[A_2,A_1]
\end{aligned}
$$

となることが分かり、$\mu_1=0,\mu_2=0,\mu_3=0$ とすると、それぞれ

$$F_{01}+F_{23}=0$$
$$F_{02}+F_{31}=0$$
$$F_{03}+F_{12}=0$$

と表される。即ち $F_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}=0$ という anti-self dual 方程式となっている。

4. ADHM 方程式と Moment Map（Self-dual Equation）

最後に ADHM 方程式について、moment map の立場から考察してみよう。

ADHM 方程式は 4 次元 gauge 理論における self-dual equation の解を与える代数方程式である。この方程式は代数方程式なので当然いわゆる有限次元空間の方程式であるが、前節で扱った無限次元 phase space における moment map である self-dual equation の解と全く同じ解を導く方程式である。ここでは、この ADHM 方程式も、ある種の phase space の moment map であることを示すことにしよう。

ADHM 方程式は

$$[B_1,B_1^\dagger]+[B_2,B_2^\dagger]+II^\dagger-J^\dagger J=0$$
$$[B_1,B_2]+IJ=0$$

で与えられる。ここで、B_i は$M(k,\mathbb{C})$であり、I,Jは$N\times k$ 複素行列である。

ところで、所謂 ADHM 方程式を導き出すには、通常次のような手続きを踏む。ADHM データ D というものがあって、この D に対して

$$D^\dagger D$$
$$=\begin{pmatrix} I & -B_2 & -B_1 \\ J^\dagger & B_1^\dagger & -B_2^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I^\dagger & -J \\ B_2^\dagger & -B_1 \\ B_1^\dagger & B_2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} II^\dagger+B_2B_2^\dagger+B_1B_1^\dagger & IJ-B_2B_1+B_1B_2 \\ J^\dagger I^\dagger-B_1^\dagger B_2^\dagger+B_2^\dagger B_1^\dagger & J^\dagger J+B_1^\dagger B_1+B_2^\dagger B_2 \end{pmatrix}$$

（実際は 0 次元 Dirac 作用素 $\nabla=Cx-D$の 2 乗 $\nabla^\dagger\nabla$）を作る。そして、この $D^\dagger D$ に対して Pauli 行列と可換であることを要求する。理由は 4 次元 Dirac 作用素 $\mathcal{D}$ の 2 乗 $\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D}$ が Pauli 行列と可換であることが gauge 場が self dual であることに一致しているためである。（つまり D に対して self duality を要求していることになるが、D は moduli の自由度を表す変数であり gauge 場そのものではない。それにも関わらず、なぜ self duality を要求するのかの直接の関係はここでは不明である。）

さて、Pauli 行列と可換であることを要求すると

$$II^\dagger+B_2B_2^\dagger+B_1B_1^\dagger$$
$$=J^\dagger J+B_1^\dagger B_1+B_2^\dagger B_2$$
$$IJ-B_2B_1+B_1B_2=0$$
$$J^\dagger I^\dagger-B_1^\dagger B_2^\dagger+B_2^\dagger B_1^\dagger=0$$

となる。即ち、上記の第 1 式より

$$[B_1,B_1^\dagger]+[B_2,B_2^\dagger]+II^\dagger-J^\dagger J=0$$

また第 2 式 , 第 3 式より

$$[B_1,B_2]+IJ=0,\quad [B_1^\dagger,B_2^\dagger]+J^\dagger I^\dagger=0$$

となり、これらが所謂 ADHM 方程式の複素表現である。

次に、上の議論で得られた ADHM 方程式をある種の phase space における moment map として求めることができるということを示そう。まず、ADHM データ

$$\begin{pmatrix} -I^\dagger & -J \\ B_2^\dagger & -B_1 \\ B_1^\dagger & B_2 \end{pmatrix}_{(N+2k)\times 2k}$$

を、ひとつの phase space と考える。そのとき、phase space に対して

$$\omega_{\mathrm{R}} = \frac{i}{2} dB_1 \wedge dB_1^\dagger + \frac{i}{2} dB_2^\dagger \wedge dB_2 + dI \wedge dI^\dagger + dJ^\dagger \wedge dJ$$

$$\omega_{\mathrm{C}} = dB_1 \wedge dB_2 + dI \wedge dJ$$

という 2-form の不変性を仮定する。この ADHM データに対して、左から

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^\dagger & 0 \\ 0 & 0 & R^\dagger \end{pmatrix}_{(N+2k)\times(N+2k)} \qquad (R \in \mathrm{U}(k))$$

右から

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}_{2k\times 2k}$$

を作用させることを考えると、この作用は上で仮定した 2-form を不変にすることは容易にわかる。さらに、それに伴って moment map が

$$\mu_{\mathrm{R}} = [B_1, B_1^\dagger] + [B_2, B_2^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J$$

$$\mu_{\mathrm{C}} = [B_1, B_2] + IJ$$

となることも容易に計算から求めることができる。もし $\mu_R = \mu_C = 0$ とすると、これはまさに ADHM 方程式である。

5. まとめと考察

ここまでの結果から、topological soliton 解を与える方程式を moment map の立場から見れば、どれも無限次元 hyperkälher 空間の moment map であることがわかった。ただ同じ無限次元 hyperkälher 空間とは言っても、それぞれ無限個の座標軸の数（空間座標依存の数）の違いで異なる方程式が出てくるということである。ただし、これら moment map として導き出された方程式は、もともと phase space の幾何学的構造だけを反映しているはずなので、それぞれの dynamics とは関係がない。つまり、energy の最低値を与えるとか、action の最低値を与えるなどの情報や dynamics の topological な情報は、これらを導出する際には全く入っていない。

考えてみれば、topological な soliton 解は、系の特定の boundary condition を満たす eq. of motion（Euler-Lagrange eq.）の解のひとつである。そして、self dual eq. や BPS eq. に代表されるような gauge 場の topology を論ずる際に現れる方程式は、系の topological な縛りから現れる方程式で、eq. of motion を直接解くかわりに、この方程式を解けば eq. of motion の解のひとつである topological soliton 解を与えるという方程式である。そもそも、本来の gauge 理論における eq. of motion は二階微分方程式であるのに対して、self dual eq. や BPS eq. は、一階微分方程式である。要するに gauge 理論の topology に関連して導き出された方程式は、どれも eq. of motion を一回積分したものとみることができる。

ところで、古典力学系における moment map のことを思い出してみよう。古典力学系で導き出される moment map はすべて eq. of motion を一回積分して出てくる量である。実際、harmonic oscillator の Hamiltonian にしろ、運動量にしろ、角運動量にしろ、moment map として導き出されるものはすべて、ある異なった条件の下で eq. of motion を一回積分して出てくる物理量であった。この事情は単に次元を無限次元に拡張しただけの gauge 理論でも変わらないはずである。そう考えれば、gauge 理論において eq. of motion を一回積分した topological な方程式が moment map として現れるのはもっともらしいと言えるかも知れない。

さらに言えることは、topological な縛りから導き出された方程式という立場でみれば、self dual eq. にしろ BPS eq. にしろ、必ずその値は 0 でなければならない。ところが、それらを moment map として見ると、

よくわからないものの、moment map は系の保存量となるべきものとして現れることが多いので、保存さえしていれば運動量や角運動量の値が 0 である必要がなかったのと同様に、moment map としての self dual eq. も BPS eq. も値が 0 である必要がない。とにかく eq. of motion を一回積分してでてきた保存量になるべきものであった。つまり、eq. of motion を一回積分すると当然積分定数が現れるが、その積分定数がそれらの方程式が意味する物理量の保存量と考えることができる。積分定数は 0 とは限らないので、これらの方程式を moment map として解釈した場合、topological な方程式と見るより多少広い意味を持っていると言えるのではないだろうか。

以上のように、gauge 理論における topological な方程式が moment map として現れるのは、一見奇妙にも見えるが、実は古典力学系の場合から類推して考えてみるともっともらしく見えるところもある。つまり、phase space の中に symplectic（hyperkähler）構造を入れると、古典力学系にしろ gauge 場の理論系にしろ Lagrange 形式から出てくる eq. of motion を一回積分した形で出てくる保存量が moment map として現れるということである。しかし、どちらの場合についても、この事実はとても不思議なことのようにみえる。dynamics を考えて Lagrangian を作り、Euler-Lagrange eq. を解くということと、単に phase space の幾何学的構造に symplectic（hyperkähler）構造を導入してその構造を壊さない群作用の moment map を作るということは、一見何も関係がないように思える。しかし、実はとても重要な関係が隠されているということではないだろうか。例えば、知らず知らずのうちに phase space の幾何学的構造と矛盾しないようにしか dynamics を作ることができないとか、symplectic（hyperkäler）構造を仮定した時点で dynamics の種を入れているとかいうことになっているのかもしれない。

moment map は symplectic（hyperkälher）構造を保つ群作用の generator である。幾何学的には moment map はその意味を持つ量でしかない。つまり、symplectic 幾何学的に moment map を導出した時点では moment map が保存しなければならない量であるということはまったく考えていない。しかし、もし moment map の値が一定になるような dynamics を考えようとするならば、そのときにはそれに見合う Lagrangian とか Hamiltonian の形（つまり、moment map が保存するような Lagrangian や Hamiltonian の形）がある程度決まると考えればよいだろう。

例えば、具体的な例を挙げると「phase space において symplectic 構造を保ちながら回転を引き起こす generator としての moment map は角運動量である。」このように言った時点ではまだどのような dynamics か何も決まっていない。しかし、「その moment map である角運動量が一定であるような超曲面上の運動に限った力学を考える」と言った途端、中心力のもとでの dynamics だと言うことが決まり、harmonic oscillator や Kepler などの Lagrangian で表される dynamics を考えることに決まってくるということだ。

moment map = 0 という世界はむしろ singular である（と言えるかもしれない）。nonzero になると、その singularity が消えるということがある。例えば、文献［4］（ADHM/Nahm 構成法とその双対性）でも、ADHM eq. ではそれが nonzero のとき、非可換にはなるが singularity は消えるということが示されており、古典力学系でも角運動量が zero という超曲面 $(\mu^{-1}(0))$ は phase space 上では singular だが、nonzero の場合

は singular ではないだろう。むしろ$\mu^{-1}(0)$の世界のほうが特殊なのかもしれない。

いずれにせよ、moment map の値が zero なのか nonzero なのかで事情が大きく異なるのは事実で、なぜそのように大きな違いが現れるのかをもう少し詳しくみてみる必要がありそうである。例えば、gauge 場のときに moment map としての self dual eq. や BPS eq. は nonzero でも構わないはずなのに、現実的に topology と関わるのは zero のときだけのようにみえる。もし nonzero の場合を考えて、その値が保存するような gauge 理論を考えたらどのようなものになるのかを考えることは価値があるかも知れない。。

いずれにせよ、無限次元の位相空間をもつ gauge 理論と moment map について、もう少し詳しく調べる必要があるものと考えられる。

参考文献

［1］P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer, (2017)

［2］C. Ross, “Moment maps and Hyper-kähler quotients”, https://cdross1.github.io/notes/moment maps.pdf

［3］山川大亮 , “ モジュライ空間と運動量写像 ”, 第３回城崎新人セミナー報告書（2006）https://sites.google.com/view/mathgraduate/KINOSAKI/2006/proceeding

［4］浜中真志 , “Hyper-Kähler 幾何の数理と物理 ”, 素粒子論研究119（4C）, 245-279,（2012）

［5］岩井敏洋 , “SU（2,2）に付随する力学系 ”, 数理解析研究所講究録第863 巻 , 121-131（1994）

［6］H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, (1950)

［7］W. Lenz, “Uber den Bewegunsverlauf und die Quantenzustäde der gestörten Keplerbewegung,” Z. Phys. 24, 197–207（1924）（in German）;

［8］C. Runge, “Vektoranalysis,” Verlag Von S. Hirzel, Leipzig, 1919.

［9］国場敦夫 “ ラプラス - ルンゲ - レンツベクトル – Gruppen Pest の始祖的例題 ”, 数理科学529, 50-55,（2007）

［10］J.Marsden and A. Weinstein, “Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry”, Reports on Mathematical Physics Vol.5,121-130（1974）

［11］T. Bartsch, “The Kustaanheimo-Stiefel transformation in geometric algebra”, J. Phys. A 36, 6963（2003）

［12］P. Saha, “Interpreting the Kustaanheimo–Stiefel transform in gravitational dynamics”, Mon. Not.Roy.Astron.Soc. 400, 228（2009）e-Print: 0803.4441 [astro-ph]

［13］P. Kustaanheimo and E. Stiefel, “Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization”, J. Reine Angew. Math. 218, 204-219（1965）

［14］H. V. McIntosh and A. Cisneros, “Degeneracy in the presence of amagnetic monopole”, J. Math. Phys. 11,896-916（1970）

［15］Toshihiro Iwai and Yoshio Uwano, “Thefour-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac’s monopole field.Classical theory”, J. Math. Phys. 27,1523-1529（1986）

［16］池森均，北門新作，佐藤俊郎，松井吉光，“Moment Map のすすめ（I）”, 愛知大学一般教育論集第59 号 , 1-28（2020）

［17］W, Nahm, “All self-dual multi monopoles for arbitrary gauge groups”,CERN-TH-3172, NATO ASI, Series B82,301-310（1981）

［18］N.J. Hitchin, “The Self-Duality Equations on a Riemann Surface”, Proceedings ofThe London Mathematical Society, 55,59-126（1987）

［19］E.B. Bogomol’nyi, “Stability of Classical Solutions”, Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449（1976）,M. K. Prasad, C.M. Sommerfield, “ExactClassical Solution for the ’t Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon”, Phys.Rev. Lett. 35, 760（1975）