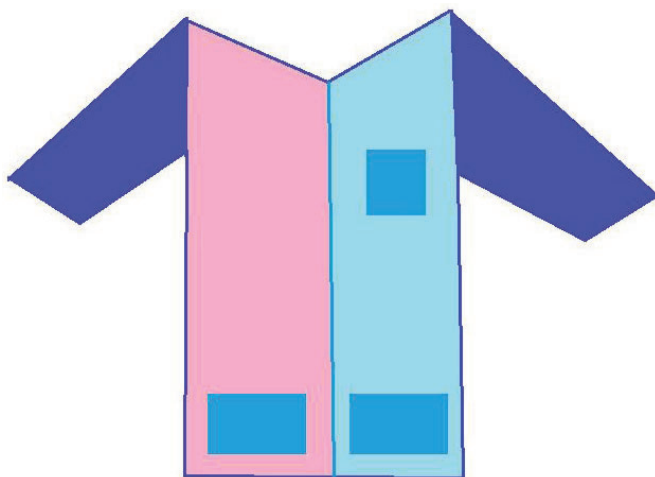


Space and Order of Four Colors

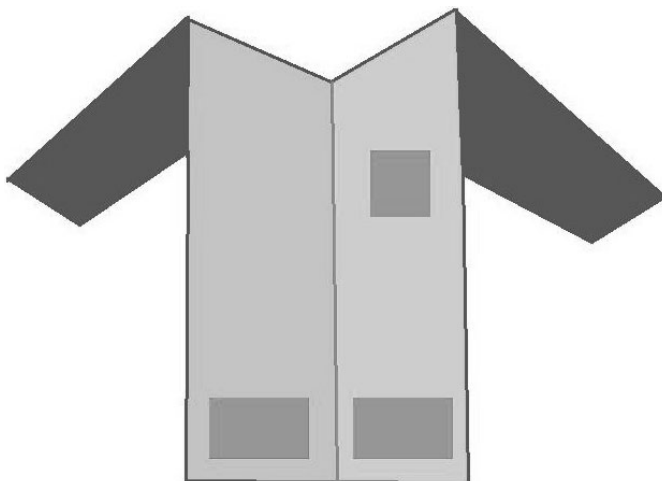
Hiroyoshi Kozu



Book series Vol. 57

Space and Order of Four Colors

Hiroyoshi Kozu



2022

Institute of Managerial Research
Aichi University

Foreword

This book consists of three papers.

First, in recent years, the four-color problem is considered to have been solved using a computer, but there are pros and cons to this. Here, aiming at a theoretical solution, based on the relationship between Newton's law of gravitational force and the weight of paint, three different monochromatic simple substances are pulled by an aggregate having one mixed color in the smallest space. Under the spatial order there, the four-color problem is solved.

Second, by introducing the concept of distance into the rank-size model, we compare the population densities of each city in a square metropolitan area and a circular metropolitan area. Here, we consider the difference in population density depending on the spatial size of the metropolitan area and the shape of the city. Furthermore, in the rank size model, the meaning of the development space in the square metropolitan area and the time required for it will be clarified.

Finally, in the process of establishing a circular metropolitan area, we consider the space and time of the metropolitan area through the movement of cities and markets by using Newton's law of attraction and Kepler's third law.

1/2/2022

Hiroyoshi Kozu

はしがき

本叢書は、物理学、数学、地理学の観点から3つの論文で構成されている。これらの論旨については、以下の通りである。

1の「四色問題の解決」:

地図上の地域は4色のみで塗分けられることになることをニュートンの引力モデルの境界条件から4つの単色の空間が導かれ、絵の具の混合色に3つの単色が引っ張られることによって、地図上の地域は4色のみで塗分けられることが解決される。

2の「都市の形状とランク・サイズの法則」:

まず、正方形都市からなる包括的都市圏における都市と単線上に接続している正方形都市圏における都市の人口密度の違いについて考察する。ついで、同心円構造における都市圏の都市とCBDから接続する円形都市の人口密度について考察する。さらに、上記4つの都市圏の都市人口密度について比較する。

最後に、正方形都市によって構成される都市圏において、ランクの二乗の係数を有するランク・サイズモデルが都市の空間とその開発に要する時間との同時性について示唆していることに触れる。

3の「大都市圏における都市の立地システム - ニュートンの引力の法則およびケプラーの第3法則にもとづいて -」:

まず地理学およびマーケティングの分野において商圈に応用されているライリー = コンパースモデルを使うことによって、中心都市および郊外都市の境界条件から導かれる相対的人口規模によって都市圏の都市数が決定されることを明らかにする。ついで、ニュートンの引力の法則およびケプラーの第3法則にもとづいて大都市圏が各都市間の引力によって形成される時空間モデルを構築する。

本叢書が、今後の学問の発展に寄与できれば幸いに存じる次第である。

2022年1月2日

神頭広好

Space and Order of Four Colors

目 次 Contents

1	Solution of the Four-Color Problem	1
2	都市の形状とランク・サイズの法則 City Shape and Rank Size Rule	11
3	大都市圏における都市の立地システム - ニュートンの引力の法則およびケプラーの第3法則にもとづいて - Urban Location System in Metropolitan Areas - Based on Newton's Law of Attraction and Kepler's Third Law -	25

Solution of the Four-Color Problem

Hiroyoshi Kozu

Aichi University, Faculty of Business Administration, Japan (e-mail: kozu@aichi-u.ac.jp)
4-60-6, Hiraike-cho, Nakamura-ku, Nagoya-city, Aichi 453-8777 JAPAN

Abstract

We attempted to solve the four-color problem by using physical law. First, by applying Newton's law of universal gravitation to a paint set and a single substance as a paint weighting one unit, the normal space distance can be regarded as a shade color distance. Second, this study showed that the minimum number of single colors in the space is four. Third, owing to the stronger gravitational force in an aggregate as a paint set, the four colors often come into contact with each other. Finally, converting this space into a two-dimensional space helped to solve the four-color problem. Most of this study's contents are based on Koza [4].

1. Introduction

By observing researchers who had challenged the four-color problem, under which every map in space can be painted in four colors, Guthrie realized that it was possible to paint a map of England in four colors in 1852. Thus, it should be relatively easy to solve a four-color problem, but De Morgan found this problem difficult to solve, and it seemed that it was solved by Kempe in 1879. However, 11 years later, Heawood discovered an error in Kempe's proof. In the early 20th century, Poancare's disciples, Perkov and Lebesgue, tried to

solve the four-color problem by using the viewpoint of geometry and graph theory. Most of the abovementioned contents were written by Goldsmith [2], Ichimatsu [3], Ore [5], Saaty and Kainen [6], and Willson [7]. Finally, Appel and Haken [1] verified the four-color problem by performing 10 billion calculations on a computer for approximately 1200 hours in 1976. Consequently, this problem became a four-color theorem. There are certain pros and cons to creating a proof by using a computer.

First, we can assume that a single color has a weight of one unit as a single body (such as paint). Then, by applying Newton's law of attraction to an aggregate that consists of several single bodies and a given single body, a simple substance having a single color that is affected by both can be created at the boundary as an equilibrium by the attractive force between the aggregate and the given simple substance. Furthermore, by repeating this, we show that there could be four single colors in the space with the minimum number of single colors. Eventually, the four simple colors can be connected through the attractive force in the direction of the aggregate; based on this spatial order, by expanding from the one-dimensional space to the two-dimensional space, we finally find that all areas on the map can be painted with four colors. It is the same as a 3D space.

2. The solution

First, the following assumptions must be set for solving the four-color problem.

- (1) A simple substance has a single color, and its weight is one unit. Furthermore, some aggregates have simple substances, and some given simple substances have a given single color.
- (2) Newton's gravitational force acts on the aggregate and a given simple substance, and a simple substance that is affected by both is born at the boundary where each gravitational force is in equilibrium. Another

simple substance is formed at the boundary between the simple substance and the aggregate.

- (3) By repeating (2), simple substances can be created between the aggregate and a given simple substance.

Second, according to Newton's law of attractive forces, the boundary condition is represented as follows:

$$\frac{P_M P_c}{d_{Mc}^2} = \frac{P_m P_c}{d_{mc}^2} \quad (1)$$

where P_M is an aggregate with several monochromatic numbers, P_m is a given simple substance, P_c is a virtual unit at the boundary, d_{Mc} is the distance between P_M and P_c , and d_{mc} is the distance between P_m and P_c .

Furthermore, based on Fig. 1, the total distance is represented as follows:

$$d = d_{Mc} + d_{mc} \quad (2)$$

Where d is the distance between P_M and P_m .

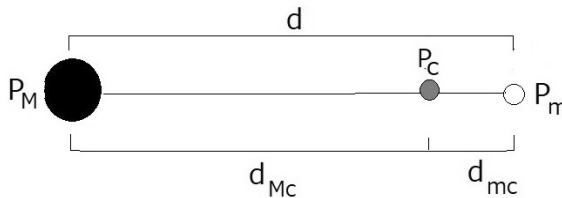


Fig. 1

Solving the simultaneous equations from (1) and (2), the distance between P_M and P_c is found to be as follows:

$$d_{Mc} = \frac{d}{1 + \frac{P_m}{P_M}} \quad (3)$$

The distance between P_m and P_c is as follows:

$$d_{mc} = \frac{d}{1 + \frac{P_M}{P_m}}. \quad (4)$$

Next, if the weight of a complete mixture of the monochromatic colors contained therein is the same as that of the aggregate of a number of monochromatic colors, an attractive force will be generated between the mixture and the first single color. For example, if this simple substance is white, a simple light monochromatic substance is initially formed when it is mixed with white at the boundary, and as the color of the simple substance is close to the color of the mixture, a dark monochromatic simple substance is created. Therefore, the distance between the mixture and the simple white substance indicates the shade distance. From (4), as $P_m = P_1$, each distance between the monochromatic colors created at the boundary up to the n is represented by

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{d}{1 + \frac{P_M}{P_1}}, \\ c_2 - c_1 &= \frac{d - c_1}{1 + \frac{P_M}{P_2}}, \\ c_3 - c_2 &= \frac{d - c_2}{1 + \frac{P_M}{P_3}}, \\ &\vdots \\ c_n - c_{n-1} &= \frac{d - c_{n-1}}{1 + \frac{P_M}{P_n}}, \end{aligned} \quad (5)$$

where $c_n - c_{n-1}$ indicates the distance between a simple substance P_{n-1} with a single color in c_{n-1} and a simple substance P_n with the next single color in c_n . From (5) and $P_1 = P_2 = P_3 \dots = P_n = 1$ from assumption (1), the sum of the

distances between each unit can be represented by

$$c_n = \frac{nd}{1 + P_M} - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{1 + P_M}. \quad (6)$$

Here, in order to include the first given one in this space, assuming that there is a single color excluding this and considering the space having the smallest single-color number, if $c_n = d$, then dividing (6) by d , (6) is represented as

$$1 = \frac{n}{1 + P_M} - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{d(1 + P_M)}. \quad (7)$$

Where P_M is the square of a natural number.

If it is ignored in the second term on the right-hand side of (7) and if the right first term of (7) is a natural number of 1, then the non-natural number condition must be

$$0 < \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{d(1 + P_M)} < 1. \quad (8)$$

Furthermore, if (8) is replaced, it is represented as

$$0 < \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{d(1 + P_M)} < \frac{n - 1}{1 + P_M}. \quad (9)$$

To satisfy (9), it needs

$$\frac{n - 1}{1 + P_M} < 1. \quad (10)$$

If (10) is satisfied, the second term on the right-hand side of (7) is ignored because it is not a natural number. Consequently, (7) can be rewritten as

$$1 = \frac{n}{1 + P_M}. \quad (11)$$

Furthermore, from (11), the number of simple colors in space is given by the following:

$$n = 1 + P_M. \quad (12)$$

Here, considering that the map is painted with the minimum number of single colors, the minimum number of single colors in the mixture or the aggregate

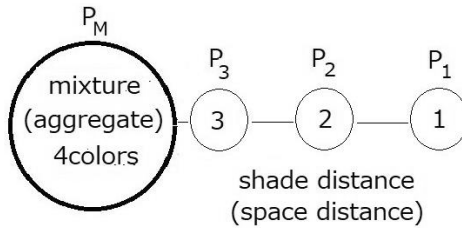


Fig. 2

Note: The numbers in this figure indicate different single colors.

as a number is a natural number (except for 1). Substituting $P_M = 4$ into (12), we obtain

$$n = 3. \tag{13}$$

Substituting (13) into (10), (10) is satisfied. Therefore, (11) is given. Consequently, (13) shows three single colors in this space (except for P_M). (See Fig. 2).

In short, this suggests that the space is divided into four monochromatic numbers. However, even if the four-color problem is solved in a one-dimensional space, it cannot be applied to a map in a two-dimensional space unless there is a reason for why the different colors come into contact with each other.

Therefore, each of the three simple substances is pulled by the attractive force in the direction of the aggregate P_M . Eventually, a single substance having three monochromatic colors in this space is connected. (See Fig. 3) In this one-dimensional space, the aggregate P_M has a stronger attraction to P_3 , P_2 , and P_1 . Looking at this step-by-step, it means that P_3 in contact with P_M has a stronger attraction to P_2 and P_1 , and P_2 in contact with P_3 has a stronger attraction to P_1 . If we think that such a spatial order is the same in the two-dimensional space, P_M will have contact with P_3 , P_2 , and P_1 at the same time, and P_3 will have contact with P_2 and P_1 at the same time. Therefore, this space can be painted in four colors by establishing contact with the many spaces

divided by four colors. Here, if the entire space is regarded as a map, and the divided space is regarded as the area drawn on the map, the map can be painted in four colors. A map separated by a rectangle is shown in Fig. 4, and the same colors are not touching each other. However, Fig. 5 shows a basic map in a case where several areas are connected, and there is an area that covers them. For example, Fig. 5 shows that three areas are connected and that, even if there is an area that covers them, they can be painted in four colors. Fig. 6 shows a map painted in four colors (based on Fig. 5). Furthermore, by replacing the circle in Fig. 3 with a sphere, this also holds in a three-dimensional space.

In short, using the paint set with four colors and a paint set of one color, four colors are aligned in the space. By using the four colors, all maps can be painted separately.

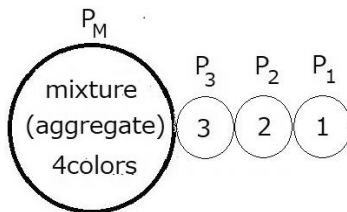


Fig. 3

1	2	3	4	3	2	1
2	1	2	3	2	1	2
1	2	3	4	3	2	1
2	1	2	3	2	1	2
1	2	3	4	3	2	1

Fig. 4

Note: The figure above shows the colors of 35 rectangular areas using four colors. It can be expanded into any number of regions and colors by alternating columns and rows. Even if the shape of the area changes, if you apply the colors in this map, the map will be painted separately in four colors. Where 4 indicates the color of P_M (similar to Fig. 5 and Fig. 6).

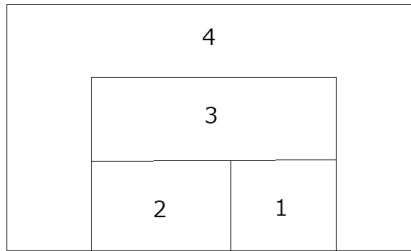


Fig. 5

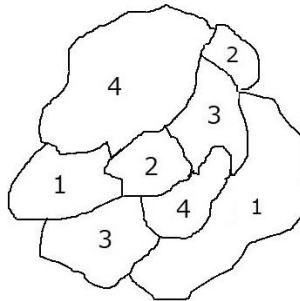


Fig. 6

3. Conclusion

First, by applying Newton's law of attraction to an aggregate consisting of a single color with a weight of one unit and a given unit, the aggregate as a number can be replaced with a mixed color as a color mixture. Consequently, the spatial distance between the mixed color and the single color is represented as the distance between the dark and light colors. Furthermore, at the boundary generated by the attractive relationship between the mixed color body and the simple substance, a single color influenced by the color of each substance can be created. While repeating this, the single color approaches the dark color of the mixed-color body. Through this process, we can observe that

there are three colors in the space that minimizes the number of simple colors. After all, the three single colors are pulled in the direction of the aggregate (or the mixture), and finally, only the four colors in the same space have contact with each other. Based on the spatial order, we find that, by expanding the one-dimensional space and the three-dimensional space to the two-dimensional space, any map can be painted in four different colors.

Reference

- [1] Appel, K. and W. Haken (1977) The Solution of the Four-Color-Map Problem, Scientific American, Scientific American, Volume 237: 108-121.
- [2] Goldsmith, M. (2019) Inside Mathematics: Understanding Shapes and Sizes, Shelter Harbor Press Ltd, New York, USA.
- [3] Ichimatsu, S. (2016) The Four-Color Problem, Kodansha (Japanese).
- [4] Koza, H. (2021) Theoretical Solution of the Four-Color Problem The Keiei Sogo Kagaku (Journal of Managerial Research), Institute of Managerial Research, Nagoya, Japan, vol. 115, pp. 51-60. (Japanese).
- [5] Ore, O. (1967) The Four-Color Problem, Academic Press.
- [6] Saaty, T.L. and P. Kainen (1977) The Four Color Problem - Assaults and Conquest, McGraw-Hill.
- [7] Wilson, R. (2002) Four Colours Suffice, Allen, Lane Science.

都市の形状とランク・サイズの法則

City Shape and Rank Size Rule

Abstract

In this study, based on the law of spatial rank and size, the urban population density in an urban area that comprehensively develops from a square city with a central business district was compared with the urban population density in an urban area where the squares are linearly connected. Next, the urban population density of a metropolitan area with a concentric structure was compared with the population density of a circular city in a metropolitan area where circular cities are linearly connected. It was found that, in a metropolitan area composed of square cities, a rank-size model with a coefficient of squares simultaneously shows the space of the city and the time required for it.

はじめに

ランク・サイズモデルの淵源は、ジップの法則¹にもとづいており、地域に応用した研究は枚挙に暇がないくらい多く見られる。実証分析においては、20世紀半ばごろから、Isardによって創設された地域科学の分野において、ランク・サイズモデルが盛んに応用された。

一方、理論的証明としては、Simon (1955) は確率論の観点からジップの法則における人口の格差係数に範囲があることを説明しており、これを都市発展モデルへと繋げている²。また Kozu (2019) では国または都市圏に移動する人口の相

1 これについては、Zipf (1946) を参照せよ。

2 これについては、Krugman (1996, chap. 8) を参照せよ。

対的な動きから、都市人口の格差係数に一定の秩序があることを導いている。また、ランク・サイズモデルは秩序が起こりうるプロセスとして、自己組織化を説明するのに応用されている³。

本論文では、まず空間的ランク・サイズの法則にもとづいて CBD を有する正方形都市から包括的に発展する都市の人口密度と直線的に正方形が接続する都市の人口密度を比較する。ついで同心円構造を有する都市圏の都市の人口密度と直線的に円形都市が接続する都市の人口密度を比較する。最後に、正方形都市によって構成される都市圏において、ランクの二乗の係数を有するランク・サイズモデルが都市の空間とその開発に要する時間を同時に示唆していることを導く。

都市の形状とランク・サイズの法則

1. 都市圏とランク・サイズの法則

都市圏において、都心から離れるにしたがって、人口が秩序にもとづいて減少していくとすれば、ランク・サイズモデルは、

$$P_n = \frac{P_1}{n} \quad (1)$$

で表される。ただし、 P_1 は都心 (CBD ; Central Business District の略称) を有する中心都市としてのランク 1 の都市、 P_n はランク n の都市、 n はランク (自然数)、 $\frac{P_1}{P_n}$ は格差係数をそれぞれ示す。

ここで、都市圏の都市の数を m とすれば、(1) から、

$$m = \left(\frac{P_1}{P_m} \right)^2 \quad (2)$$

で表される。

(2) から、以下のことが整理される。

- (1) 限界集落の人口 P_m が大きいほど都市圏の都市数 m が少なくなる。
- (2) 都心部の人口 P_1 が大きいほど、都市圏の都市数 m が多くなる。

3 例えば、Allen, P. M. (1997, chap. 2), Batty, M. (1976, chap. 8), Krugman, P. (1996, chap. 3)などを参照せよ。

(3) 都市間の都市人口に格差があるほど、都市数 m が少なくなる。

過去の地域研究において人口などに関しては n が 1 から 2 に近い値が推計されていることが多く見られる。そこで (1) において $n = 2$ とすると、(1) は、

$$P_n = \frac{P_1}{n^2} \quad (3)$$

で書き換えられる。

(3) から、都市圏においての都市数 m は、

$$m = \frac{P_1}{P_m} \quad (4)$$

で表される。(4) を用いることによって、中心都市としてのランク 1 の都市人口と最後の都市の最小人口が分かれば、都市圏の都市数が推計可能となる。これは、秩序が最適を意味するならば、最適な都市数を導くことになる。

ちなみに、(3) の両辺に P_n を乗じると、

$$P_n^2 = \frac{P_1 P_n}{n^2} \quad (5)$$

で表される。(5) は左辺を引力の大きさとすれば、 n は抵抗となり、ニュートンの引力の法則を表しているかのようである⁴。ここにランク・サイズモデルは世界の秩序、自己組織化を説明している奥深さが見られる。

2. 正方形都市の人口密度

都心から離れるにしたがって、一定の秩序にもとづいて面積が大きくなっていくことが前提である。これには、Alonso (1964) の地代論が関わっている。

(A) 大都市圏正方形都市包括型⁵：CBD を有する正方形の都市を中心にそれを囲むように正方形の都市が包み込んでいくケース (図 1)

4 これについては、神頭 (2013, pp. 29-34) を参照せよ。

5 これについては、正方形ではあるが面的に交通網が発展しているという意味において、大都市圏としている。

正方形の面積の増分は、

$$S_n = n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1 \quad (6)$$

で表される。

さらに、ランク n の都市の人口密度は、

$$D_n = \frac{P_n}{S_n} = \frac{P_n}{2n - 1} \quad (7)$$

で表される。

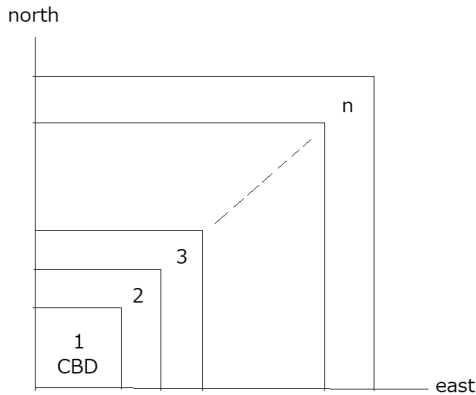


図 1

(B) 地方都市圏正方形都市接続型⁶ : CBD を有する正方形の都市から単線上に正方形の都市が広がっていくケース (図 2)

ランク n の都市の人口密度は、

$$D_n = \frac{P_n}{n^2} \quad (8)$$

で表される。

6 これについては、単一直線上に交通が伸び、正方形の都市が接続しているという意味において、地方都市圏としている。

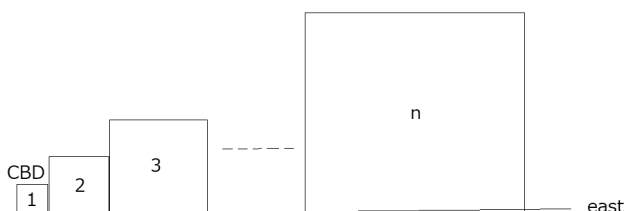


図 2

(A) のケースと (B) のケースにおける都市の人口密度

図 3 は、(7) および (8) を用いて、 $P_n = 10000$ 、 $1 < n \leq 50$ で描かれている。なお、(7) は実線、(8) は破線を示す。

ここでは、都市数に関わりなく、(A) のケースの方が (B) のケースよりも人口密度は高い。一方、(B) のケースでは都市数 10 くらいまでに人口密度は急激に減少する。その後は変化の度合いは少ない。これについては、地方都市圏よりも大都市圏の方が交通網において充実していることから、人が集まり易く、企業や消費者が流入、集中することを示唆しているように見える。

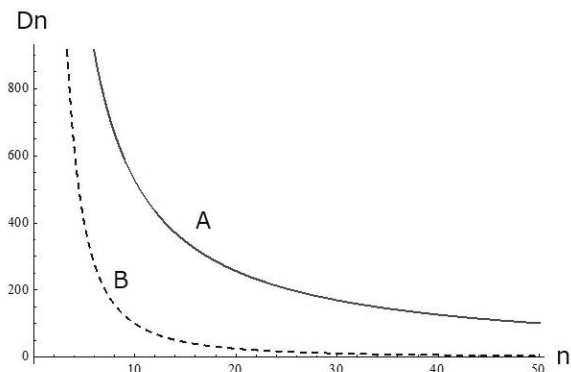


図 3

3. 円形都市の人口密度

(C) 大都市圏同心円型⁷ : CBD を有する円形の都市から同心円状に円形都市が広がっていくケース (図 4)

円形の面積の増分は,

$$S_n = n^2 - (n - 1)^2 = (2n - 1) \quad (9)$$

で表される。

ランク n の都市の人口密度は,

$$D_n = \frac{P_n}{(2n - 1)} \quad (10)$$

で表される。

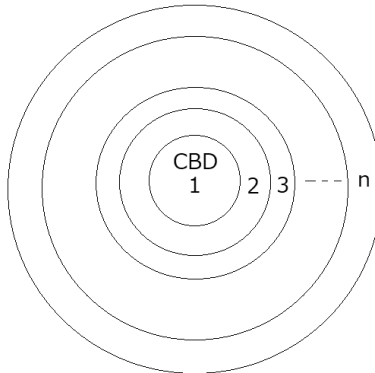


図 4

(D) 地方都市圏円形都市接続型⁸ : CBD を有する円形の都市から円形都市が連接していくケース (図 5)

ランク n の都市の人口密度は,

7 これについては、円の中心から面的に交通網が発展して、都市が広がっているという意味において、大都市圏としている。

8 これについては、単一直線上に交通が伸び、円形の都市が連接しているという意味において、地方都市圏としている。

$$D_n = \frac{P_n}{n^2} \quad (11)$$

で表される。

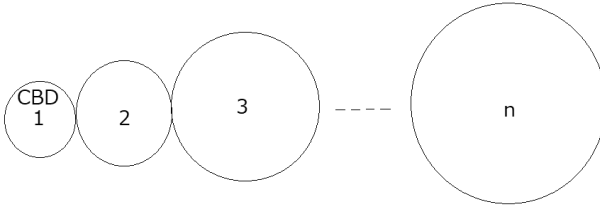


図 5

(C) のケースと (D) のケースにおける都市の人口密度

図 6 は、(10) および (11) を用いて、 $P_n = 10000$ 、 $1 < n \leq 50$ で描かれている。なお、(10) は実線、(11) は破線を示す。

ここでは、上記同様に都市数に関わりなく、(C) のケースの方が (D) のケースよりも人口密度は高い。また、(D) のケースでは都市数 10 くらいまでに人口密度は急激に減少する。その後は変化の度合いは少ない。これについては、地方都市圏よりも大都市圏の方が交通網において充実していることから、企業や消費者が流入、集中することを示唆しているように見える。

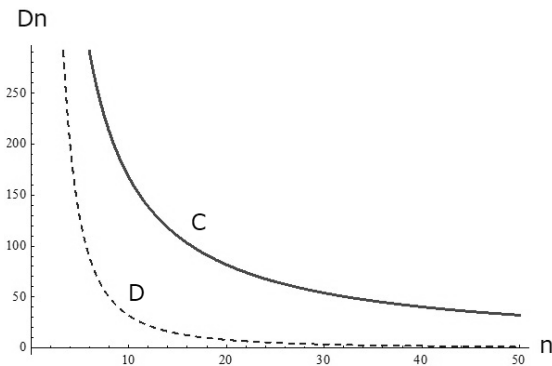


図 6

(A) のケースと (C) のケースにおける都市の人口密度

図7は、(7) および (10) を用いて、 $P_n = 10000$ 、 $1 < n \leq 50$ で描かれている。なお、(7) は実線、(10) は破線を示す。

ここでは、(A) のケースの方が (B) のケースよりも人口密度が高い。このことは、前者の方が企業や消費者が交通の便利なところ、さらに都心へなるべく近いところに集中することを物語っている。

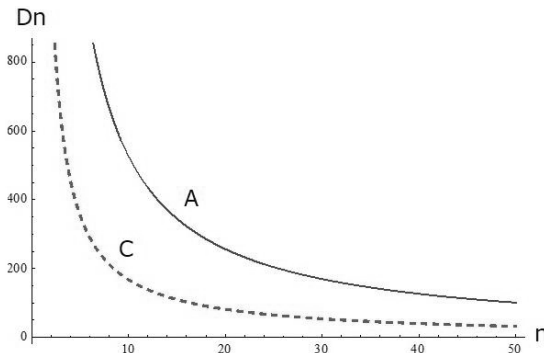


図7

(B) のケースと (D) のケースにおける都市の人口密度

図8は、(8) および (11) を用いて、 $P_n = 10000$ 、 $1 < n \leq 50$ で描かれている。なお、(8) は実線、(11) は破線を示す。

ここでは、(B) ケースおよび (D) ケースの開発初期、中期段階においては、都市の人口密度に大きな差が見られるが、都市数が増加するにつれて、人口密度の差が縮まってくる。これについては、地方都市の都市圏では、都心から離れると極端に人口密度が減っていく現象を捉えているように見える。

(A), (B), (C), (D) の各ケースにおける都市の人口密度

図9は、(7), (8), (10) および (11) を用いて、 $P_n = 10000$ 、 $1 < n \leq 50$ で描かれている。

ここでは、(A), (B), (C), (D) の順の人口密度が低いが、とりわけ (B)

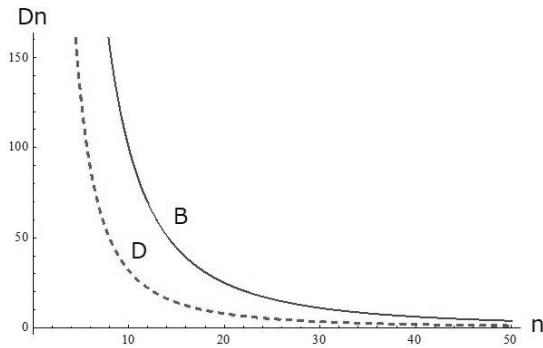


図 8

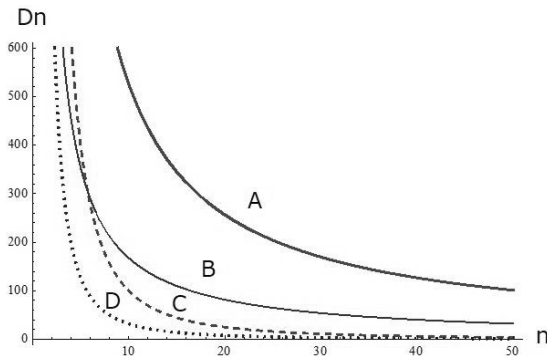


図 9

のケースと (C) のケースを比較すると、都市数が 6 以下の場合は (C) のケースの方が、(B) のケースよりも人口密度が高いことが分かる。都市圏形成において、同心円における都市の方が早く開発されるが、直線上の正方形の都市の方が後になって開発されることを物語っている。これは、円形の方が正方形よりも均一な発展を促しているように見える。

都市圏の開発とランクの意味

1. 正方形都市の開発と時間

中心都市のビルの高さはランク・サイズモデルにしたがっているとすれば、そ

のモデルは、

$$h_n = \frac{h_1}{n^2} \quad (12)$$

で表される。ただし、 h_1 はランク 1 の都市のビルの高さ、 h_n はランク n の都市のビルの高さをそれぞれ示す。また、ここでのビルの高さは、最高階数でも平均階数でも構わない。

ここで、上記の A のケース（大都市圏正方形都市包括型（図 1））において、ビル建設、土地開発の結果として正方形都市の成立する空間と時間⁹とが自然数として一致すると仮定すると、時間と空間は、

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad (13)$$

で表される¹⁰。

さらに、都市圏の最後の限界都市のビルの高さを 1 ($h_n = 1$) とすると、

$$h_1 = n^2 \quad (14)$$

である。

これは、ビルの高さが都市の集積の水準を表しているとすれば、ランク 1 の都市の集積水準が影響する都市の数を時間と空間で示していると言える。

例えば、5 番目の都市の成立は、時間を遡ると、CBD を有する都市のビルの高さは 25 階であると考えることができる。ここでの n^2 の意味は深いものがある。

2. 長方形および正方形の都市が構成する都市圏の開発

北 (North) および東 (East) へ正方形の単位で都市が開発されて行くと、結果的に正方形と長方形の都市が形成され、さらに境界線が連続して発展していくと、図 10 のような正方形の都市圏が成立する。この都市圏の特徴として、都市ランクは東、北に向かい、対角線（北東 45 度線）上にランクの 2 乗の都市のみが存在する。（図 10）

したがって、都市の開発は、空間も時間も正方形単位の面積で計られるとする

9 これは、中心都市から新たな正方形都市が成立するまでの時間を示す。

10 この考え方は、神頭（2020, pp. 39-51）にもとづいている。

と、東、北へ向かう単線上（边上）の都市開発時間は、

$$T_{EN} = \frac{n(n+1)}{2} \quad (15)$$

で表される。(15) は鉄道や道路の開発に関しては最短距離の開発時間を示している。

一方、対角線上の都市開発時間は、

$$T_D = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (16)$$

で表される。(16) は鉄道や道路の開発に関しては最長距離の開発時間を示している。

対角線上の都市開発時間は、東、北それぞれの边上の都市開発時間に比べて、その倍数は、

$$\frac{T_D}{T_{EN}} = \frac{2n+1}{3} \quad (17)$$

である。(17) については開発時間差が比例的に大きくなっていくことを示唆している。

交通整備については、正方形都市の同時の利便性を考慮するならば、開発時間を狭める必要がある。

	North			
	4	8	12	16
	3	6	9	12
	2	4	6	8
	1	2	3	4
CBD	East			

図 10

おわりに

ランク・サイズモデルを都市圏に応用すると、中心都市人口と郊外都市人口との相対的大きさによって都市圏における都市の数が分かること、またランク・サイズモデルがニュートンの引力モデルと似ていること、さらに大都市圏正方形都市包括型の都市人口密度、地方都市圏正方形都市接続型の都市人口密度および同心円型の都市圏の都市人口密度、地方圏円形都市接続型の都市人口密度について比較した。その結果、CBD からの交通網の拡大や開発の段階によって都市の人口密度に違いがあることが分かった。最後に、大都市圏正方形都市包括型において、中心都市のビルの高さに対してランク・サイズの法則が応用されるならば、都市の開発空間と大都市圏の成立する時間がその法則にインプリシットに含まれていることが分かった。さらに、そこでは限界都市のビルの階数を 1 階にすることによって中心都市のビルの高さが導かれ、そこでは時間と空間が共存しているのである。

参考文献

- Allen, P. M. (1997) *Cities and Regions as Self-Organizing Systems*, Taylor & Francis.
- Alonso, W. (1964) *Location and Land Use*, Harvard Universe Press (邦訳 - 折下 功 『立地と土地利用』朝倉書店, 1966 年)
- Batty, M. (1976) *Cities and Complexity*, The MIT Press.
- Berry, B. J. L. and Horton, F. E. (1970) *Geographic Perspectives on Urban Systems*, Prentice Hall.
- Isard, W. (1956) *Location and Space-Economy*, The M.I.T.Press (監訳 - 木内信蔵 『立地と空間経済』朝倉書店, 1964)
- Kozu, H. (2013) *Order and Complexty in a City*, The Keiei Sogo Kagaku (journal of managerial research), Institute of Managerial Research, Aichi University, pp.1-24.
- Kozu, H. (2019) "City System Based on the Rank-Size rule", *Locational Analysis of Firms'Activities from a Strategic Perspective*, edited by T. Ishikawa, Springer.
- Krugman, P. (1996) *The Self-Organizing Economy*, Blackwell (邦訳 - 北村行伸・妹尾美紀 『自己組織化の経済学』東洋経済新報社, 1997 年)
- Simon, H. (1955) *On a Class of Skew Distribution Functions*, *Biometrica*

Zipf, G. K. (1946) The $P_1 P_2 / D$ hypothesis on the Intercity Movement of Persons, *America Sociological Review* 11: pp.677-86.

神頭広好 『都市の空間経済立地論 - 立地モデルの理論と応用 - 』古今書院, 2009 年

神頭広好 『都市の立地構造 - 幾何学, 地理学および集積経済からの発想 - 』愛知大学経営総合科学研究所叢書 37, 2011 年

神頭広好 『都市化の集積経済効果と空間距離』愛知大学経営総合科学研究所叢書 41, 2013 年

神頭広好 「秩序にもとづく都市圏における正方形の都市の構造」『中央大学経済学論纂 (中央大学)』第 60 巻, 第 3・4 号合併号, 2020 年

大都市圏における都市の立地システム

ニュートンの引力の法則およびケプラーの第3法則にもとづいて

Urban Location System in Metropolitan Areas

Based on Newton's Law of Attraction and Kepler's Third Law

Abstract

The Reilly - Converse model, which is applied to trade areas in the fields of geography and marketing, was used to construct a model to determine the number of cities in a metropolitan area by the relative population size derived from the boundary conditions between a central city and a suburban city. Based on Newton's law of attraction and Kepler's third law, a spatiotemporal model, in which metropolitan areas were formed by gravitational forces between cities, was constructed.

はじめに

これまで、都市を対象にして、空間と時間を同時に扱う理論モデルがあったであろうか。従来、計量経済学でも時空間計量経済学というものもあるが、時系列データを都市に応用して時間を区切っているものを見かけるものの、時系列データが限られていることから分析手法に重きが置かれている。また、都市経済学および経済地理学においてミクロ経済学の空間的アプローチをさらに発展させた新経済地理学¹においても企業間距離を介しての集積の経済に照準が充てられているが、都市全体の大きさの差から生じる都市の創出についてはあまり見られない。

本論文では、まず地理学およびマーケティングの分野において商圈に応用されているライリー＝コンバースモデルを使うことによって、中心都市および郊外都

1 この分野の淵源については、Krugman (1991, pp. 483-489) に負うところが大きい。

市の境界条件から導かれる相対的人口規模によって都市圏の都市数が決定されるモデルを構築する。

ついで、ニュートンの引力の法則およびケプラーの第3法則にもとづいて大都市圏が各都市間の引力によって形成される時空間モデルを構築する。

大都市圏の都市数決定モデル

ここでのモデルは、都心部と通勤圏とが同時に形成される大都市圏を説明する。まず、モデルの構築に当たり、以下の諸仮定が設定される。

大都市圏における都市は中心都市と郊外都市（中心都市周辺の都市を含む）の相対的規模によって、順次境界となるところに市場および住宅地としての都市が形成される。

中心都市と郊外都市の市場の境界に創出されるすべての都市の人口は、郊外都市の人口規模に等しい。それゆえ、中心都市とその周辺を含む郊外都市の人口比は変わらない。

上記の仮定のもとで、ライリー＝コンバースモデル（付録2）の境界条件を応用して大都市圏の都市数を導くために、中心都市としての第1番目から第n番目までに創出された各郊外都市からの市場の境界距離は、

$$c_1 = \frac{d}{1 + \frac{P_M}{P_m}},$$

$$c_2 - c_1 = \frac{d - c_1}{1 + \frac{P_M}{P_m}},$$

$$c_3 - c_2 = \frac{d - c_2}{1 + \frac{P_M}{P_m}},$$

⋮

$$c_n - c_{n-1} = \frac{d - c_{n-1}}{1 + \frac{P_M}{P_m}} \quad (1)$$

で表される。ただし、 P_M は中心都市の人口、 P_m は郊外都市の人口、 d は中心都市と大都市圏の端に立地する郊外都市間の距離、 c_1 は中心都市と郊外都市の最初の境界距離、 c_n は c_{n-1} からの境界距離を示す。

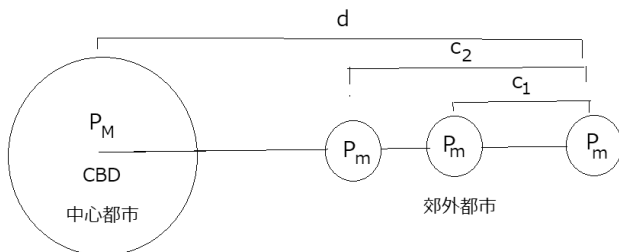


図 1

さらに、(1) の和をとると、

$$c_n = \frac{nd}{f} - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{f} \quad (2)$$

が導かれる。ただし、 $f = 1 + \frac{P_M}{P_m}$ である。

また、 $c_n \approx d$ として、(2) を d で除すると、

$$1 = \frac{n}{f} - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{df} \quad (3)$$

で表される。ここで、(3) の第 3 項が端数として無視される条件は、

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{n-1}}{df} < \frac{n-1}{f} < 1 \quad (4)$$

である。そこで、(4) が満たされれば、(3) は、

$$1 = \frac{n}{f} \quad (5)$$

に書き換えられる。(5) から、線形の大都市圏における都市数は、

$$n = f = 1 + \frac{P_M}{P_m} \quad (6)$$

で表される。ただし、(6) において n は自然数であることから、相対的都市人口は平方数である必要がある。

(6) については、中心都市と郊外都市の相対的な大きさによって都市数が決定されることを示唆している。これは、相対的に郊外部の都市と比べ、中心都市が大きい大都市圏においては都市の数が多いことを示唆している。

ところで、(6) から大都市圏における最小の都市数となる条件は、

$$\frac{P_M}{P_m} = 4 \quad (7)$$

であることから、(7) を (6) へ代入すると、 $n = 3$ が得られる。これより大都市圏における中心都市を加えると、最小の都市数は 4 となる。

さらに、円形の大都市圏における都市数は、中心からの道路や鉄道に依存しているとする、それらの数を都市数に乘じることによって求められる。

他方、重量均衡の観点から、中心都市の集積経済が、高速交通網が均等に強化されて、

$$P_M = nP_m \quad (8)$$

が成立するところで中心都市と郊外都市において、(8) は人口規模と比例する都市化の集積経済が釣り合っているという意味において均衡している状態を示して

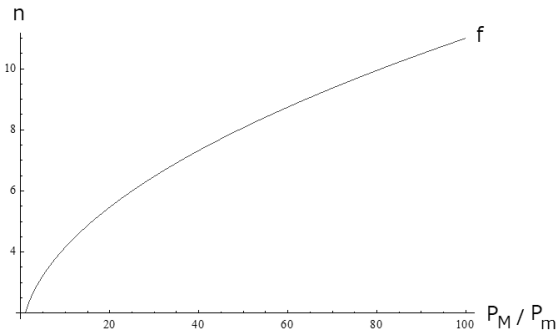


図2 中心都市 郊外都市の相対的人口規模による都市数

いる²。

ここで、まず、中心部と周辺を含む郊外部が均衡する線形大都市圏の都市数（厳密には、介在都市数）は (8) から、

$$n = \frac{P_M}{P_m} \quad (9)$$

で表される。

(9) の解釈として、中心都市と郊外都市とが人口規模において均衡しているとすれば、通勤圏を考慮して都心部に比較的近い都市とみなすことができる。

一般に、円形の大都市圏において創出した都市数 x は、

$$n : d = x : d^2 \quad (10)$$

から、

$$x = n d \quad (11)$$

によって求められる。

ちなみに、(6) および (7) から線形の大都市圏における最小の都市数が中心都市を除き 3 であることから、円形の大都市圏における最小の都市数は、

$$x = 3 d \quad (12)$$

である。

付録 1 ライリー = コンバースモデル³

線形の都市を仮定して、都市 M と都市 m の引力が等しいところに境界地が存在しているとすれば、ニュートンの引力の法則から、

$$\frac{P_M P_c}{d_{Mc}^2} = \frac{P_m P_c}{d_{mc}^2} \quad (A1)$$

2 これについては、神頭 (2011, pp. 14-15) において、ランク・サイズモデルにも応用されている。

3 これについては、神頭 (2009, pp. 60-61) を参照せよ。また、Reilly (1931) と Converse (1949, pp. 379-384) が商圈分析において同時に使われていることから、ライリー = コンバースモデルと呼ばれている。

が成立する。ただし、 P_M は都市 M の人口、 P_m は都市 m の人口、 P_c は境界にある町 c の人口、 d_{Mc} は都市 M と町 c との距離、 d_{mc} は都市 m と町 c との距離を示す。

さらに、線形都市の距離の条件から、

$$d = d_{Mc} + d_{mc} \quad (A2)$$

である。ただし、 d は都市 M と都市 m 間の距離を示す。

(A1) および (A2) から 2 つの方程式を解くと、都市 M と町 c との距離と都市 m と町 c との距離、

$$d_{Mc} = \frac{d}{1 + \frac{P_m}{P_M}} \quad (A3)$$

および

$$d_{mc} = \frac{d}{1 + \frac{P_M}{P_m}} \quad (A4)$$

が導かれる。

III 大都市圏時空間モデル

モデルの構築に際し、以下に都市形成のプロセスが設定される。

ここでは、同質平野上に均一に人口が分布している大都市圏を考えよう。

- (1) 2 つの工業都市が存在しており、そこで生産されるそれぞれの製品の交換は重心となる市場都市で行われる。
- (2) 一方の工業都市が発展すると、市場はその発展した工業都市に近づく。
- (3) それぞれの工業都市の市場（労働および製品の市場）の境界において、企業または住宅が立地することによって、新たな都市が創出する。
- (4) 一方の工業都市が大きくなると、近くの市場都市を併合することで、大きな中心都市が出来上がる。
- (5) 中心都市がさらに大きくなると、外部不経済などが起こるために、最も遠方の郊外の円周上に都市開発が進められる。

(6) 大都市圏の構造は、ケプラーの法則が作用している⁴。

上記プロセスについて図3および図4にしたがって説明する。

まず、図3から(1)規模の同じ2つの工業都市Mおよびmが立地している。ただし、Mおよびmは立地とともにそれぞれ都市の人口規模を示す。ついで、(2)中心に初期の重心都市(市場都市)G'が立地する。さらに、(3)この左に立地する工業都市Mの規模拡大、これによって市場都市がGへ移動する。

最終的に、図4から(4)Gを含む工業大都市Mと工業都市mの境界に住宅都市としての新興住宅都市Lが立地する。

ここで、工業都市の空間的重心は、

$$aM = (d - a)m \quad (13)$$

で表される。(13)より、

$$\frac{a}{m} = \frac{d - a}{M} \quad (14)$$

が導かれる。(14)から、大規模工業都市から重心までの距離と小規模工業都市から重心までの距離の比は、

$$a : d - a = m : M = \frac{1}{M} : \frac{1}{m} \quad (15)$$

で表される。

さらに、(15)から大規模工業都市から重心までの距離は、

$$a = \frac{m}{M + m} d \quad (16)$$

である。

一方、境界都市は2つの都市からの引力の等しい所であることから、この条件はライリー＝コンパースモデルを用いることによって、

4 ここでは、連星の理論にもとづいている。これについては、鳴沢(2020, 第4章)を参照せよ。

$$\frac{Mc}{h^2} = \frac{mc}{(d-h)^2} \quad (17)$$

で表される。ただし、 h は大規模工業都市から境界までの距離、 c は境界都市の人口規模を示す。

(17) から、大規模工業都市から境界までの距離は、

$$h = \frac{M}{M+m}d \quad (18)$$

で示される。

これまでの記号および距離の計算が以下に整理される。(図3参照)

M : 大規模工業都市, m : 工業都市

G' : 初期均衡都市 (重心都市, 市場都市, 歴史都市), G : 均衡都市 (重心都市, 市場都市, 行政都市), L : 住宅都市 (境界都市)

$$M - G' \text{ 間の距離} : \frac{d}{2}$$

$$M - G \text{ 間の距離} : a = \frac{m}{M+m}d$$

$$M - L \text{ 間の距離} : h = \frac{M}{M+m}d$$

$$G - L \text{ 間の距離} : h - a = \left(\frac{M}{M+m} - \frac{m}{M+m} \right) d$$

$$G' - L \text{ 間の距離} : h - \frac{d}{2} = \left(\frac{M}{M+m} - \frac{1}{2} \right) d$$

さらに、時間を踏まえた大都市圏の立地の法則性は、ケプラーの第3法則によって、

$$M+m = \frac{4}{g} \frac{d^3}{T^2} = k \frac{d^3}{T^2} \quad (19)$$

で表される。ただし、このケプラーの法則において、 M は質量の大きな星、 m は質量の小さな星、 d は2つの星間の距離、 T は公転周期 (一周する時間) をそ

れぞれ示す。また、 k は定数 ($k = \frac{4}{g^2}$) であり、 g は万有引力定数である。

ここで、 m と M の相対的な大きさを

$$s = \frac{m}{M} \quad (20)$$

として、(ただし、 $0 < s < 1$) (20) を (19) へ代入すると、

$$M + m = (1 + s)M = k \frac{d^3}{T^2} \quad (21)$$

で表され、(21) を変形すると、

$$M = \frac{k}{(1 + s)} \frac{d^3}{T^2} \quad (22)$$

である。

さらに、 M に対して m がかなり小さい場合は、 $s \approx 0$ であることから (22) は、

$$M = k \frac{d^3}{T^2} \quad (23)$$

で表される。(付録 2 を参照)

ここで d は大都市圏の大きさ、 T は円周において都市開発する時間とすると、(23) から M と G が融合した大都市または大都市圏都心部における人口は、大都市圏の大きさ (半径の 3 乗) に比例して、1 周する都市開発時間の 2 乗で反比例していることを示唆している。

これによって、一種の同心円モデルが説明される。これについては、図 4 に示されている。ただし、ここでの L は M と G の統合によって、さらに m に近い所に立地することを示唆している。

さらに、(23) から都市開発時間は、

$$T = k \frac{d^3}{M} \quad (24)$$

で表される。(24) から、都市開発時間は大都市圏が大きいほど長くなるが、中心都市の規模が大きいほど都市開発時間は短くなることを示唆している。これについては、すでに開発された中心部よりも開発されていない郊外部の方が、時間

がかかっていることを示唆している。

一方、空間は、

$$d = \sqrt[3]{\frac{MT^2}{k}} \quad (25)$$

で表される。(25) から、大都市圏の空間的大きさは中心都市の規模と都市圏周辺の開発時間に比例的である。これについては、大都市圏の空間的大きさは中心都市の人口規模にほぼ比例的であり、都市開発時間にも比例して徐々に大きくなることを示唆している。

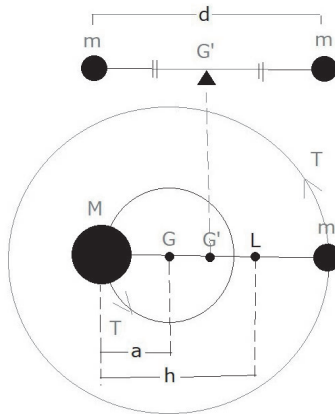


図 3

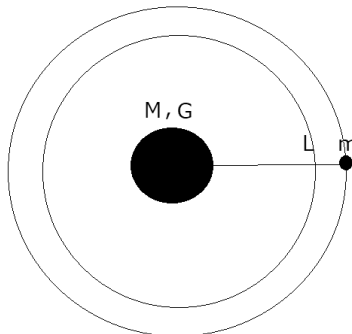


図 4

付録2 ケプラーの第3法則の導出

ニュートンの重力の法則は、

$$F = g \frac{Mm}{d^2} \quad (\text{B1})$$

で表される。

また、遠心力は、

$$F = ma = \frac{m}{d} \quad (\text{B2})$$

で表される。

m が回り続けるという重力と遠心力の等しい関係から、

$$g \frac{Mm}{d^2} = \frac{m}{d} \quad (\text{B3})$$

が成立する。ただし、 $\frac{2}{d}$ は加速度を示す。

この加速度については、遠心力による等速円運動および位置エネルギーから求められる。

ちなみに、この加速度は中心加速度と呼ばれ、これは、

$$a = \quad = d^2 \quad (\text{B4})$$

で表される。ただし、 \quad は角速度（時間変化あたりの角度変化）を示す。

それゆえ、この加速度による力は、

$$F = am = \quad m = d^2 m = d \left(\frac{\quad}{d} \right)^2 m = \frac{\quad}{d} m \quad (\text{B5})$$

で表される⁵。

また、円周における速度は、

$$= \frac{2 \cdot d}{T} \quad (\text{B6})$$

で表される。(B6) と (B3) から、

5 これについては、酒井（2016，第7講）において平易に説明されている。

$$M = \frac{4}{g} \frac{d^3}{T^2} \quad (\text{B7})$$

が導かれる。

他の解釈として、遠心力の速度（等価速度）に中心への力が与えられていることから、中心に向かって加速度としての力が作用する。距離に関するピタゴラスの定理（付図）から、

$$d^2 + (vt)^2 = \left(d + \frac{1}{2}at^2\right)^2 \quad (\text{B8})$$

または、

$$d^2 + (vt)^2 = d^2 + dat^2 + \frac{1}{4}a^2t^4 \quad (\text{B9})$$

で表される。

さらに、 t を微々たるものとして、 $0 < t < 1$ とすれば、 $t^4 \approx 0$ であり、これを (B9) へ代入すると、

$$v^2t^2 = at^2d \quad (\text{B10})$$

が導かれる。

(B10) から、加速度（厳密には向心加速度）は、

$$a = \frac{v^2}{d} \quad (\text{B11})$$

で表される⁶。

(B11) が成立する場合は、

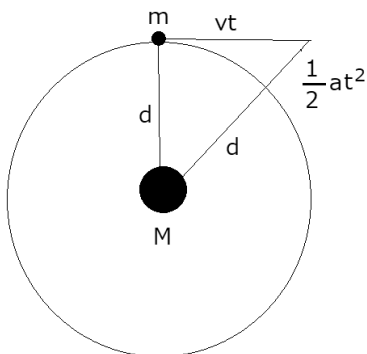
$$M + m = \frac{4}{g} \frac{d^3}{T^2} \quad (\text{B12})$$

であっても

$$s = \frac{m}{M} \quad (\text{B13})$$

とすると、(B12) は、

6 これについては、神頭（2016，第1章）および Newton（2020）を参照せよ。



付図

$$(1+s)M = \frac{4}{g} \frac{d^3}{T^2} \quad (\text{B14})$$

に書き換えられ、 M が m よりかなり大きい場合、

$$s = \frac{m}{M} \approx 0 \quad (\text{B15})$$

とすれば、(B14) は、

$$M = \frac{4}{g} \frac{d^3}{T^2} \quad (\text{B16})$$

に書き換えられる。

IV おわりに

ここでは、まずライリー＝コンバースモデルを大都市圏に適用して、中心都市と郊外都市の境界地に新都市が成立することを前提にして、さらにその都市と中心都市との境界地に新たな都市が順次成立する場合、最終的に中心都市と郊外都市の相対的人口の大きさから大都市圏における都市の数がいくつになるかを明らかにした。ちなみに、ここでは線形の大都市圏における最小の都市数が3であることからトータルの都市数は中心都市を含めて4であることが分かった。

また、都市の人口による重量均衡のもとで、中心都市の都市化の集積の経済に

引っ張られる通勤圏としての円形大都市圏の都市数を求めた。

最後に都市形成の空間と時間を考慮して、ニュートンの引力の法則とケプラーの第3法則を応用することによって、都市の時空間モデルを構築した。そこでは、人口規模の等しい2つの都市の立地から出発して、同心円状の大都市圏が形成されることを踏まえ、都市の開発時間と大都市圏の空間的大きさとの関係が示された。

今後は、本モデルと現実の都市圏の構造との関係を明らかにする必要がある。

参考文献

- Converse, P. D. (1949) New laws of retail gravitation, *Journal of Marketing*, 14, pp.379-384.
- Krugman, P. (1991) "Increasing Returns and Economic Geography", *Journal of Political Economy*, 99 (3), pp.483-499.
- Reilly, W. J. (1931) *The law of retail gravitation*, Knickerbocker Press.
- 神頭広好 (2009) 『都市の空間経済立地論』古今書院
- 神頭広好 (2011) 『都市の立地構造 - 幾何学, 地理学および集積の経済からの発想 - 』愛知大学経営総合科学研究所叢書 37, 愛知大学経営総合科学研究所
- 神頭広好 (2016) 『宇宙物理学の都市空間への応用』愛知大学経営総合科学研究所叢書 48, 愛知大学経営総合科学研究所
- 酒井邦嘉 (2016) 『高校数学で分かるアインシュタイン:科学という考え方』東京大学出版会
- 鳴沢真也 (2020) 『連星からみた宇宙』講談社
- Newton (2020) 『物理 力学編』Newton Press.

著者紹介
(Author)

神 頭 広 好
HIROYOSHI KOZU

Professor of Location Analysis
Faculty of Business Administration

愛知大学経営総合科学研究所叢書 57
Book series Vol. 57 in Institute of Managerial Research, Aichi University

Space and Order of Four Colors

2022 年 1 月 26 日発行

著 者 神頭広好
発 行 所 愛知大学経営総合科学研究所
〒453-8777 名古屋市 中村区 平池町 4 丁目 60-6
印刷・製本 株式会社 一 誠 社
名古屋市 昭和区 下構町 2-22

[非売品]

