

〔論 説〕

シュレディンガー波動方程式にもとづく 都市圏の人口変動モデル —実の世界と虚の世界—

神 頭 広 好

1 はじめに

ニュートンの重力モデルは、今でも地理学やマーケティングの分野に応用されている¹。しかし、量子論²を社会科学に応用した研究はあまり見られない。ちなみに、シュレディンガーの波動方程式は、量子論の根幹をなすものであり、大雑把に言うと、ニュートンやアインシュタインの重力理論に対して量子論は確率論をベースとして、不確定な素粒子の波動を分析するために虚数が導入されている。

ここでは、複素数の世界において相対性理論におけるポテンシャルと量子論を結び付けられることを可能にするために、シュレディンガーの波動方程式の考え方を人口変動に応用する。そこでは確率論的解釈ではなく、量子の波のような流れを都市の人口の流れに置き換えることによって、時間による人口変動と都市の相対的の魅力としてのポテンシャルによる人口変動が複素数の世界をベースに現実の世界と虚（イメージ）の世界において、どのような動きをする

1 最近では、神頭(2016)において、ニュートンの引力の法則を用いて、リピート圏について分析している。さらに、Kozu(2022, pp.25-38)ではニュートンの引力の法則とケプラーの第3法則を使って、大都市圏のシステムについて説明している。

2 これについては、佐藤勝彦(2006, 第4章)および矢沢サイエンス編著(2018, 第2章)において物語的に説明されている。

かについて分析する。

総じて、複素数の実数部と虚数部に着目して、前者を現実の世界、後者を虚の世界として考えながらも2つの世界が無限にもとづくゼロの操作において繋がっている。また、ポテンシャルは限界効用逓減の法則と似たような動きをしめしており、時間と三角関数の時間が共存する場合、究極的には現実のポテンシャルは、イメージによるポテンシャルの2倍になることが推察される。

II シュレディンガー波動方程式にもとづく人口変動モデル

モデルの主たる仮定は、以下の通りである。

- (1) 量子が人口³、ポテンシャルは都市の位置としての魅力を示しており、ポテンシャル関数は距離の関数で表される⁴。また、人口の変動は不確定性を有しているために、現実の世界（実感できる世界）にいる場合でも虚の世界（イメージの世界）にいる場合でも起こりうる。すなわち私たちの住んでいる世界は、実数の世界であるように見えるが、その背後には虚数の世界が見え隠れしている。
- (2) 人口変動関数は、時間とポテンシャル要素から成り立っており、分離型の関数である。
- (3) 時間の人口変動はポテンシャルによって加速するものの都市人口が大きいほどその加速は小さくなり、それが人口変動にマイナスに作用させる。
- (4) 魅力としてのポテンシャルは都市の変動に影響を与える。

上記の仮定の下で、一般にシュレディンガー方程式⁵は、

3 ただし、量子は波であるということを考慮すると、人口変動そのものを指す。

4 他に、都市経済学または新経済地理学におけるCP(核-周辺)モデルでのポテンシャル関数は2地域間の間接効用の差の積分としている。これについては、Fujita, M. and Thisse, J.-F. (2013) (邦訳, pp.352-357) を参照せよ。

5 これについては、竹内(2004、第1章)、吉田(2012、第5章)、近藤(2017、第3章IX)、

$$ih \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} + V(d)f \quad (1)$$

で表される⁶。

ただし、 f :人口変動（波動関数）、 t :時間、 $V(d)$:ポテンシャル（都市の魅力）、 d :立地点、 m :都市人口（粒子の質量）、 \hbar :時間の変化およびポテンシャルの加速に影響を与えるインパクト（時間・ポテンシャルインパクト⁷）

(a) 上式 (1) における $0 < \hbar < 1$ のケースまたは \hbar に対して m が相対的にかなり大きなケース

ここで、時間・ポテンシャルインパクトがほとんどない $0 < \hbar < 1$ の場合は、 $\hbar^2 \approx 0$ であるとするれば、(1) は d に関わらず、

$$ih \frac{\partial f}{\partial t} = Vf \quad (2)$$

で表される。(2) を解くことによって、

$$f = f(0)e^{-\frac{Vt}{\hbar}} \quad (3)$$

が導かれる。ただし、 $f = f(0)$ は初期条件を示す。

さらに、(3) を三角関数表示に変換すると、

$$f = f(0)e^{-\frac{Vt}{\hbar}} = f(0) \left[\cos\left(\frac{V}{\hbar}t\right) - i \sin\left(\frac{V}{\hbar}t\right) \right] \quad (4)$$

で表される。これは一種の循環型の人口変動関数を示している。

ただし、 $0 < V$ 、 $0 < \hbar$ 、 $0 \leq t$ である。（以下同様）

原岡 (2018, pp.315-342)、竹内 (2019, 第4章)、竹内 (2020, 第3章) を参照せよ。

6 この方程式については、馬場 (2021, 講義 2) において平易に説明されている。また、竹内 (2005, 第3部) ではエクセルを用いてシュレディンガー方程式が描かれている。一方、竹内 (2007, pp.107-124) では Maxima を用いて描かれている。

7 例えば、就業機会、所得の上昇分などがこれにあたる。

①実数部分としての現実の世界（直接の世界）

虚の世界（虚数）をなくすために、

$$\cos\left(\frac{V}{h}t\right)=\pm 1 \quad (5)$$

および

$$-i\sin\left(\frac{V}{h}t\right)=0 \quad (6)$$

が成立するためには、

$$\left(\frac{V}{h}t\right)=0 \quad (7)$$

を必要とする。(7)が成立するのは、

$$t=0 \quad (8)$$

または

$$\frac{V}{h}t=2(n-1)\pi \quad (9)$$

の時である。ただし、 n は自然数である。（以下同様）

したがって、(9)からポテンシャルは、

$$V=\frac{2(n-1)h\pi}{t} \quad (10)$$

で表される。(10)は、現実の世界において「偶数ポテンシャル」であることを示している。

このポテンシャルは、(10)からインパクトに比例して、時間の経過とともに徐々に低くなっていく。

②虚数部分としての虚の世界（または間接の世界）

現世をなくすためには、

$$\cos\left(\frac{V}{h}t\right)=0 \quad (11)$$

および

$$-i\sin\left(\frac{V}{h}t\right)=-i \quad (12)$$

を必要とする。そのためには、

$$\left(\frac{V}{h}t\right)=\frac{(2n-1)\pi}{2} \quad (13)$$

が満たされなければならない。

したがって、(13) からポテンシャルは、

$$V=\frac{(2n-1)h\pi}{2t} \quad (14)$$

で表される。(14) は、虚の世界において「奇数ポテンシャル」であることを示している。

このポテンシャルは、(14) からインパクトに比例して、時間の経過とともに徐々に低くなっていく。

これは、 n を一定とすると、どの世界でもポテンシャルが長期においてほぼ消滅していくことを物語っている。物的には競争原理によるポテンシャルの食い潰しとも考えられる。

(b) 時間と自然数の大きさが比例するケース

時間と三角関数時間⁸との関係は、時間が自然数で進むことと同じであるから、

$$n=\beta t \quad (15)$$

で表される。ただし、 β は自然数の時速を示している。

(15) を (10) へ代入すると、現実の世界でのポテンシャルは、

8 この時間は、 π を基本としており、通常の時計の逆回り、すなわち左回りである。

$$V = \frac{2(n-1)h\pi}{t} = \frac{2(\beta t-1)h\pi}{t} = 2\left(\beta - \frac{1}{t}\right)h\pi \quad (16)$$

で表される。ただし、 $0 < V$ であり、(16) を t で微分すると、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{2h\pi}{t^2} \quad (17)$$

で表される。

さらに、(17) を t で微分すると、

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{2h\pi}{t^3} \quad (18)$$

で表される。

これらのことから、ポテンシャルは、(16)、(17) および (18) から経済学での限界効用逓減の法則が作用しているように見える。

ここで、時間が無限に大きくなると、すなわち $t \rightarrow \infty$ ならば、(16) は、

$$V \approx 2\beta h\pi \quad (19)$$

に書き換えられる。

一方、虚の世界のポテンシャルは、上記同様に、

$$V = \frac{(2n-1)h\pi}{2t} = \frac{(2\beta t-1)h\pi}{2t} = \left(\beta - \frac{1}{2t}\right)h\pi \quad (20)$$

で表される。さらに、(20) を t で微分すると、

$$\frac{dV}{dt} = \frac{h\pi}{2t^2} \quad (21)$$

で表される。

さらに、(21) を t で微分すると、

$$\frac{d^2V}{dt^2} = -\frac{h\pi}{t^3} \quad (22)$$

で表される。

虚の世界でも (20)、(21) および (22) からポテンシャルを効用に置き換え

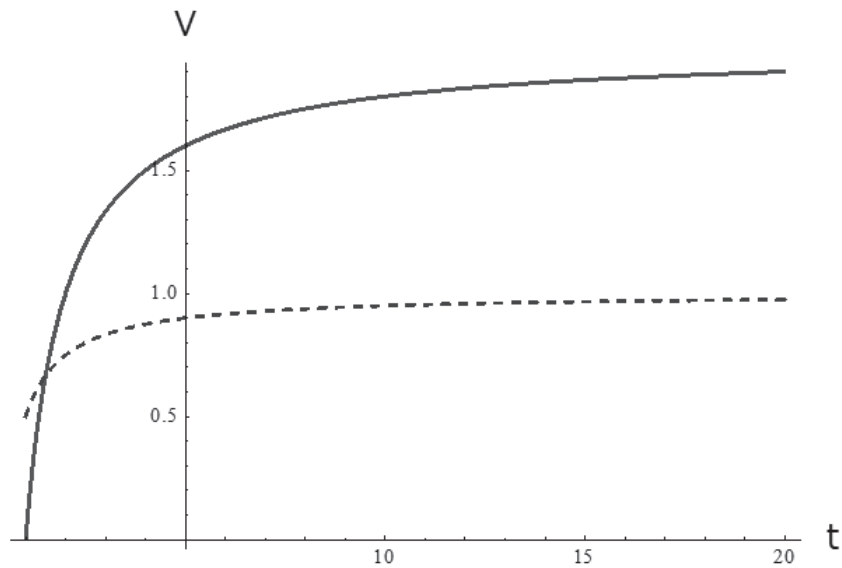


図 1

ると、経済学での限界効用逓減の法則が作用しているように見える。

ここで、時間が無限に大きくなると、すなわち $t \rightarrow \infty$ ならば、(20) は

$$V \approx \beta h \pi \tag{23}$$

に書き換えられる。

(19) と (23) の 2 つの式から、究極的には、現実の世界の方が虚の世界よりもポテンシャルは2倍になることを示唆している⁹。

図1は、 $\beta=1$ 、 $h\pi=1$ として、現実の世界のポテンシャル (16) は実線で、虚の世界のポテンシャル (20) は点線で描かれている。

(c) 時間を含まないケース¹⁰

このケースのシュレディンガー方程式は、

9 心理学的には、イメージしたポテンシャルよりも現実のポテンシャルの方が複雑で、2倍も大きいことを物語っている。

10 このケースについては、馬場 (2021、pp.48-59) を参照せよ。

$$Ef = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} + V(d)f \quad (24)$$

で表される。

ただし、 E は人口の変動関数に与えるエネルギー¹¹として、都市圏人口を示しており、質量 m としての都市人口に比例している。なお、物理学では、 $E = mc^2$ から、 E は想像を超える値である。 $c=1$ の時のみ都市圏の人口と都市の人口が一致する。

ここで、人口変動関数が

$$f = e^{ad} \quad (25)$$

で表されるとして、(25) を (24) へ代入すると、

$$Ee^{ad} = -\frac{\hbar^2}{2m} (a^2 e^{ad}) + V(d)e^{ad} \quad (26)$$

で表される。さらに、(26) を解くと、

$$a = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V(d) - E)} \quad (27)$$

が導かれる。(27) を (25) へ代入すると、人口変動関数の基本解は、

$$f = e^{\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V(d) - E) \right\}^{0.5} (d-1)} \quad (28)$$

または

$$f = e^{-\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V(d) - E) \right\}^{0.5} (d-1)} \quad (29)$$

で表される。さらに、一般解は、

$$f = Be^{\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V(d) - E) \right\}^{0.5} (d-1)} + Ce^{-\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} (V(d) - E) \right\}^{0.5} (d-1)} \quad (30)$$

で表される。

11 これは、アインシュタインの相対性理論から導かれる。(馬場(2021、講義1)を参照

ここで、繰り返しになるがポテンシャルの関数を $V(d) = \frac{A}{d}$ とし、 E のエネルギーを都市圏人口とする。ただし、 A は都心の集積の魅力¹²、 d は都心からの距離を示す。(以下同様)

また、都心の距離を $d=1$ とし、都心部の人口変動を $f(1)=1$ とすると、 $B=C=\frac{1}{2}$ である。これらを (30) へ代入すると、

$$f = \frac{1}{2} e^{\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{A}{d} - E \right) \right\}^{0.5} (d-1)} + \frac{1}{2} e^{-\left\{ \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{A}{d} - E \right) \right\}^{0.5} (d-1)} \quad (31)$$

で表される。

さらに、(31) は以下の2つのケースに分けられる。

① $E < V(d)$ のケース

ここでは、(31) を用いて、都市圏の距離を変化させた時とポテンシャルを変化させた時の人口変動関数の変化について考察する。

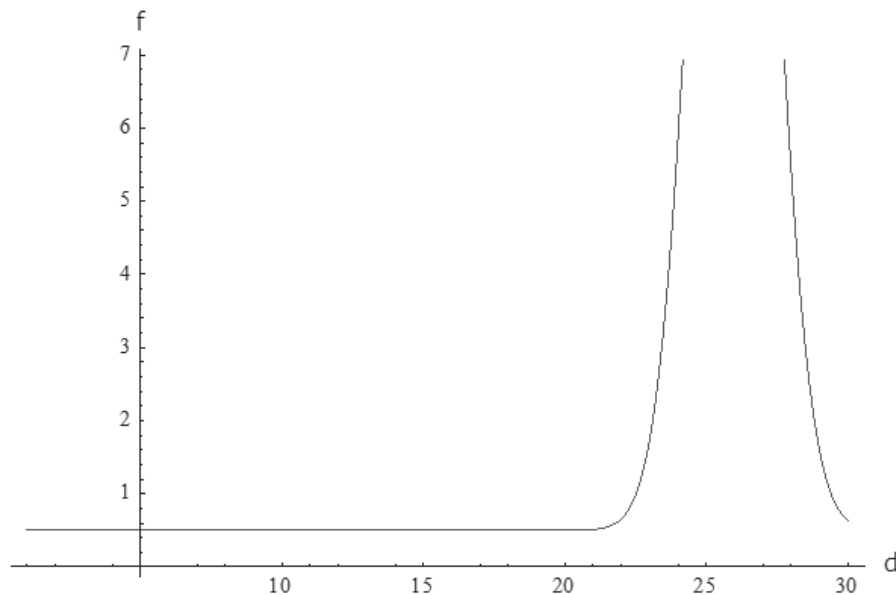


図2

12 例えば、多種多様な多くの企業、多くの公共サービスの存在を示す。

図2は、(31) に関して、 $A=10000$ 、 $1 \leq d < 30$ 、 $E=200$ で描かれている。ただし、縦軸の値が大きいことから、(31) に 0.1^{146} を乗じている。(図3および図4も同様)

図2から、都心から30kmの都市では約23kmまでは都市の変動は一定であるが、そこから急激に人口変動が起こり、26kmあたりから限界地にかけて人口変動が急減することを示唆している。

(a) 都市圏拡大のケース

図3は、(31) に関して、 $A=10000$ 、 $1 \leq d < 60$ 、 $E=200$ で描かれている。ただし、縦軸の値が大きいことから、(31) に 0.1^{146} を乗じている。

図3から、図2と人口変動が大きく変化する所は、ほぼ同じであるが、全体的に変動の大きさが小さくなっている。

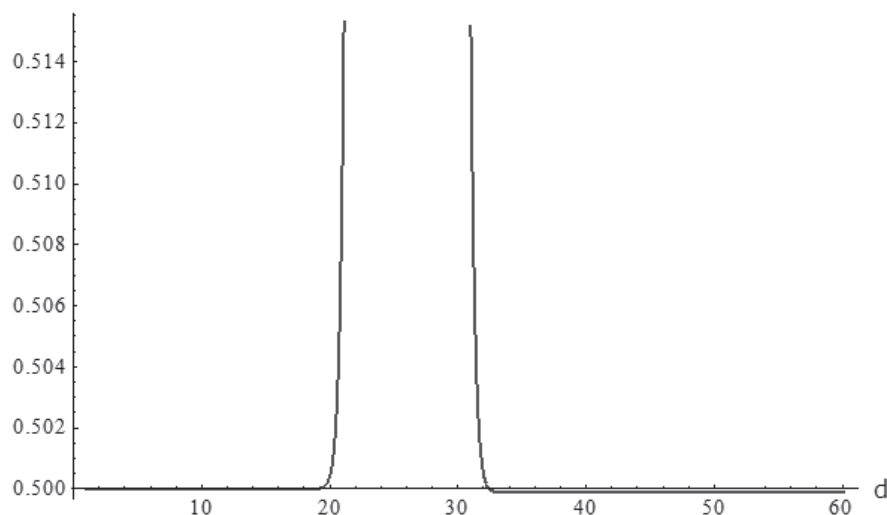


図3

(b) 都心の魅力が上昇するケース

図4は、(31) に関して、 $A=10000$ 、 $1 \leq d < 60$ 、 $E=200$ で描かれている。ただし、縦軸の値が大きいことから、(31) に 0.1^{146} を乗じている。

図4から、図2および図3と異なり、人口変動が大きく変化する所は、都心か

ら離れており、全体的に変動の大きさがかなり大きくなっている。

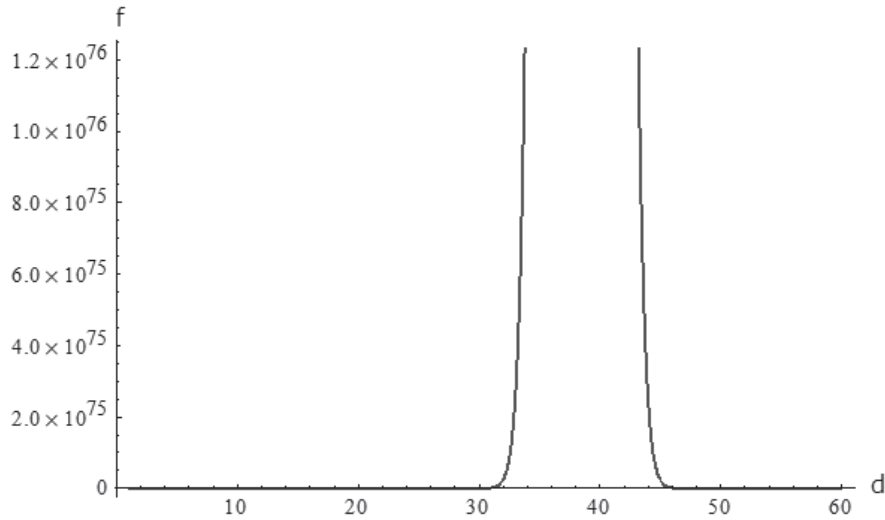


図 4

上記を整理すると、まず図 2 と図 3 から、都市圏の範囲を拡げると、人口変動の大きさが減少するものの、人口変動の変化が大きい所は変わらず、20km から32km の間である。ついで図 3 と図 4 から、都心の魅力をさらに 2 倍大きくすると、人口変動の大きさが大きくなり、人口変動の変化が大きい所は、32km から45km の間である。したがって、都市圏の空間的大小は人口変動の大きさに影響するが、都心の魅力の大きさが増すと、人口変動の起こる場所がより都心から離れた所に移っていく傾向が見られる。

これについては、都市圏が拡大されれば、人口変動が緩和され、都心の魅力が高ければ、少くとも都心から離れても企業や住宅が立地するといった現状を反映しているように見える。

ここで、付録から、(31) に対してべき乗級数を応用すると、

$$0 \leq \left[\frac{2m}{h^2} \left(\frac{A}{d} - E \right) \right]^{0.5} (d-1) \leq 1 \quad (32)$$

であるならば、

$$f = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2m}{h^2} \left(\frac{A}{d} - E \right) \right)^{0.5} (d-1) \right]^2 = 1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2m}{h^2} \left(\frac{A}{d} - E \right) \right) (d-1)^2 \right] \quad (33)$$

で表される。

図5は、(33)に関して、 $\frac{2m}{h^2} = \frac{1}{20000}$ 、 $A = 10000$ 、 $1 \leq d < 20$ 、 $E = 200$ で描かれている。

図5から、インパクトとしての就業機会が多く、所得が高い都心の人口変動が極端に高く、その変動は都心周辺ではほとんどなくなり、そこから郊外にかけて、徐々に高くなって行く。これについては、都心の地価が極端に高いために、その周辺の人口変動はすぐになくなり、その変動が都心部周辺から続いていることを物語っている。

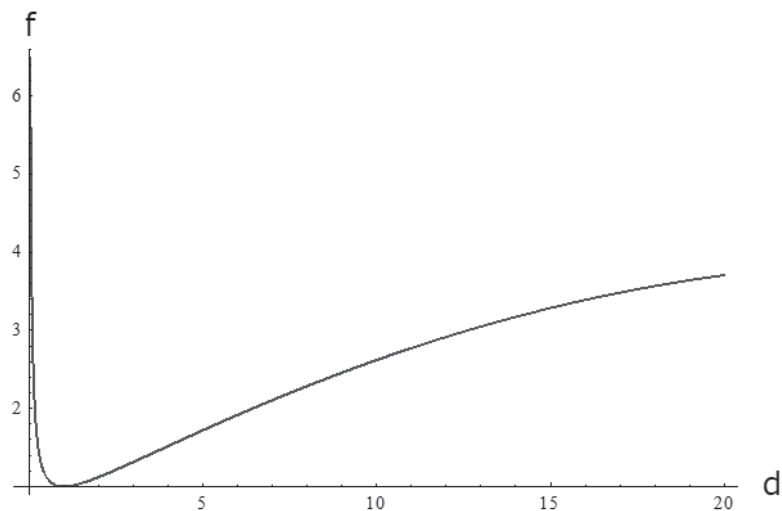


図5

② $V(d) < E$ のケース

一般解は、(31)から、

$$f = \frac{1}{2} e^{\left\{ \frac{2m}{h^2} (E - V(d)) \right\}^{0.5} (d-1)i} + \frac{1}{2} e^{-\left\{ \frac{2m}{h^2} (E - V(d)) \right\}^{0.5} (d-1)i} \quad (34)$$

で表される。(34) から、

$$f = \cos \left[\left\{ \frac{2m}{h^2} (E - V(d)) \right\}^{0.5} (d-1) \right] \quad (35)$$

が導かれる。

ここでのケースを考慮すると、ポテンシャルとしての都市の魅力は都心からの距離が短いほど高いとすれば、このポテンシャルは、上記同様に、

$$V(d) = \frac{A}{d} \quad (36)$$

で表される。

また、(36) を (35) へ代入すると、人口変動関数は、

$$f = \cos \left[\left\{ \frac{2m}{h^2} \left(E - \frac{A}{d} \right) \right\}^{0.5} (d-1) \right] \quad (37)$$

で表される。

図6、図7、図8は、(37) における係数 $\frac{2m}{h^2}$ および A を 1 とし、 E のエネルギーは都市圏人口 5、10、100 とし、都心からの距離を $1 \leq d < 20$ とし描かれている。

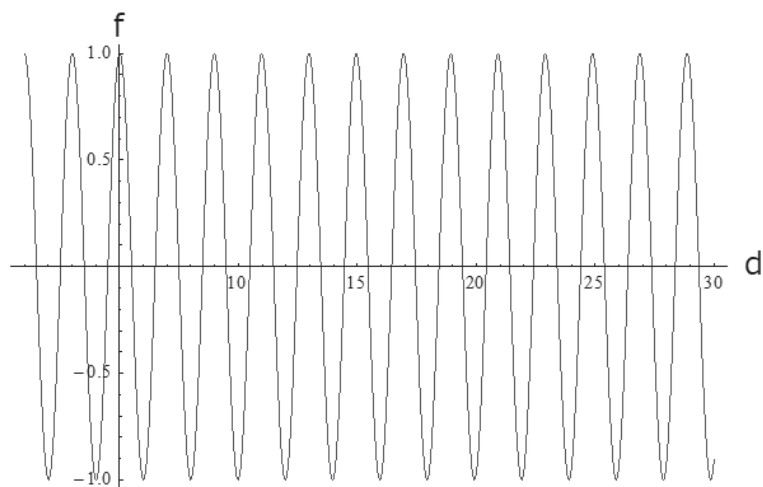


図6 都市人口10万人で距離が30km のケース

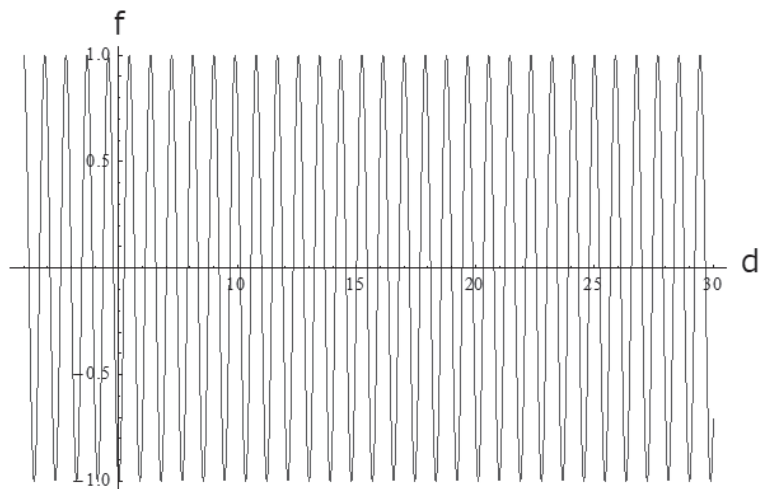


図7 都市人口50万人で距離が30km のケース

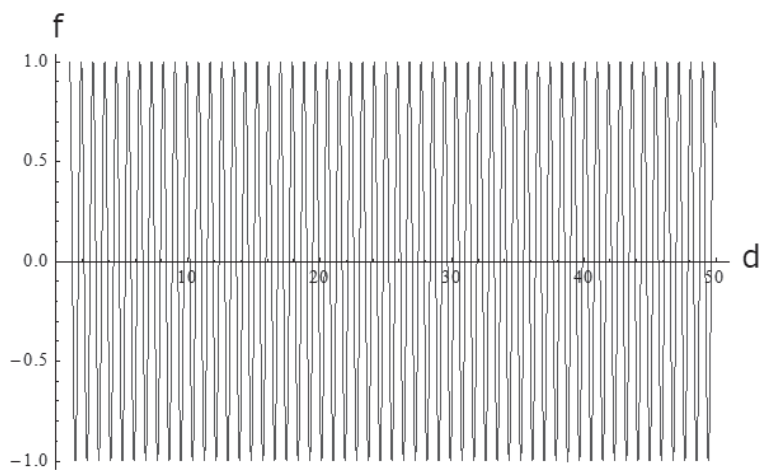


図8 都市人口50万人で距離が50km のケース

なお、ここでは都市圏をイメージし易くするために、それぞれ万人、km の単位を用いている。

整理すると、図6、図7および図8から、都市圏人口および都市圏が空間的に大きいほど、人口変動の波の数が多く、波長が短いことを示唆している。これについては、東京大都市圏に見られるように、人口が多く、空間的な拡がりを持つほど人口の変動が活発であることを物語っている。

III おわりに

ニュートンやアインシュタインの幾何学的な理論よりもボーアやシュレディンガーに代表される量子論は数学的素養がなければ、理解が難しい。量子論の基礎は、確率論的であり、オイラーの虚数や複素数の考え方¹³を学んだ上で、波動関数を理解する必要がある。

本研究は、門外漢の私にとって、物理学者からすれば、奇妙に思われるかもしれないが、重力モデルは社会科学、とりわけ地域科学の分野（地理学、マーケティング、地域経済学など）および都市計画に応用されている。そこで、量子力学における波動関数も社会科学に応用できないかと考え、ここでは、シュレディンガー方程式を都市圏の人口変動に応用した。ただし、難解な数学的処理を排除するために、それぞれの係数を単純化して分析を行っている。

ここでは、現実の世界と虚（イメージ）の世界を区別しても、時間に対してのポテンシャルとしての効用が限界効用逓減の法則に従っている。現実に得られた時間の方が虚の時間よりも2倍大きいことが分かった。そこでは、時計と三角関数時計が共存していることは興味深い。さらに、都心の魅力の高まりは都市圏全体の人口変動を上昇させ、都心からより離れたところで、さらにそれが急増することが分かった。おそらくこれらの内容は実証分析をしても近い結果が得られるものと考えられる。

今後は、複素数の世界について、あらゆる学問の分野から追及して行くことが課題として残される。究極的には、私たちが住んでいる社会は複素数の世界であっても無限からゼロの操作によって、現実の世界か虚の世界のどちらかへも転ぶことを明らかにしたような気がする。

13 これについては、例えば、堀場（1990）、原岡（2013）、吉田（2012）、松岡（2020、第2章、第3章）などは、とても平易に説明されている。

付録

指数関数のべき乗級数を用いると、

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

および

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

であることから、

$$f = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

で表される。

ここで、 $-1 \leq x \leq 1$ とすると、上式は、

$$f = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

によって近似される。

参考文献

- Fujita, M. and Thisse, J.-F. (2013) *Economics of Agglomeration*, Second Edition, Cambridge University Press. (邦訳－徳永澄憲・太田充『集積の経済学』東洋経済新報社、2017年)
- Kozu, H. (2022) *Space and Order of Four Colors*, Book series Vol.57, Institute of Managerial Research, Aichi University.
- Penrose, R. (1997) *The Large, The Small and The Human Mind*, edited by Malcolm Longair, The Press Syndicate of The University of Cambridge (邦訳－中村和幸『心は量子で語れるか』講談社ブルーバックス、2019年)
- 神頭広好 (2016) 『宇宙物理学の都市空間への応用』愛知大学経営総合科学研究所叢書48、愛知大学経営総合科学研究所

シュレディンガー波動方程式にもとづく都市圏の人口変動モデル

- 近藤龍一 (2017) 『12歳の少年が書いた量子力学の教科書』 ベレ出版
- 佐藤勝彦 (2006) 『[図解] 相対性理論と量子論』 PHP 研究所
- 示野信一 (2012) 『複素数とはなにか』 講談社ブルーバックス
- 竹内 淳 (2005) 『高校数学でわかるシュレディンガー方程式』 講談社ブルーバックス
- 竹内 薫 (2004) 『世界が変わる現代物理学』 ちくま新書
- 竹内 薫 (2007) 『はじめての数式処理ソフト』 講談社ブルーバックス
- 竹内 薫 (2010) 『量子重力理論とはなにか』 講談社ブルーバックス
- 竹内 薫 (2019) 『「ファインマン物理学」を読むー量子力学と相対性理論を中心としてー』
講談社ブルーバックス
- 竹内 薫 (2020) 『「ファインマン物理学」を読むー力学と熱力学を中心としてー』 講談社ブルー
バックス
- 竹内 薫 (2022) 『ゼロから学ぶ量子力学』 講談社ブルーバックス
- 馬場敬之 (2021) 『改訂4 量子力学 キャンパス・ゼミ』 マセマ出版
- 原岡喜重 (2013) 『オイラーの公式がわかる』 講談社ブルーバックス
- 原岡喜重 (2018) 『はじめての解析学』 講談社ブルーバックス
- 堀場芳数 (1990) 『虚数の不思議』 講談社ブルーバックス
- 松浦 壮 (2020) 『量子とはなんだろう』 講談社ブルーバックス
- 松岡 学 (2020) 『数の世界』 講談社ブルーバックス
- 矢沢サイエンスオフィス (2018) 『[図解] 相対性理論と量子論』 (株) ワン・パブリッシング
ダ
- 吉田信夫 (2012) 『虚数と複素数から見えてくるオイラーの発想』 技術評論社

