〔研究ノート〕

ABC 予想への回帰
―AC 予想、準 ABC 予想および平均公式にもとづいて―

神　頭　広　好

はじめに

ABC 予想（abc conjecture）は1985年にジョセフ・オステルスとデイビット・マンサーによって提起された数論の未解決予想であり、ABC 予想とは、「$a+b=c$を満たす互いに素(1 以外に共通の約数をもたない)な自然数の組(a,b,c)に対し、積 abcの互いに異なる素因数の積を d と表す。このとき、任意の ε（$0<\varepsilon$）に対して、 $d^{1+\varepsilon}<c$を満たす組、 (a,b,c)は有限個しか存在しない」という予想である[1]。すなわち、 $d^{1+\varepsilon}<c$ を満たすものがたかだか有限個しか存在しないことを証明するものである[2]。

本研究では、まず ABC 予想にもとづいて AC 予想を設定する。ついで、準 ABC 予想を設定することによって AC 予想から導かれた不等式を用いて、ABC 予想を回帰する。最後に算術平均、幾何平均、調和平均の関係から、ABC 予想について考察する。

1 最近では、京都大学の望月教授によって ABC 予想が証明されたとしている。（“「ABC 予想」論文掲載　京大の望月教授証明、審査7年半”. 日経新聞（日本経済新聞社）.（2021年3月7日））

2 この定式化については、他に 2 つの定式が存在する。これについては、ABC 予想 - Wikipedia を参照せよ。また、ABC 予想については、黒川（2012、128-131）、黒川・小川（2018）、また文系向きには小山（2021、第20話－第24話 ）、横山（2022、pp.244-247）によって平易に説明されている。

ABC 予想への回帰

ここでは、ABC 予想にもとづいて AC 予想を以下のように設定する。

「$a^n + a^m = c$を満たす自然数の組(a^n, a^m, c)に対して、互いに異なる素因数の積をdと表す。このとき、任意のε（$0<\varepsilon$）に対して、$d^{1+\varepsilon} < c$を満たす組、(a^n, a^m, c)は有限個しか存在しない」(以下、「AC 予想」)

AC 予想の下で、素数の累乗の和は、

$$c = a^n + a^m = a^n(1+a^{m-n}) \tag{1}$$

と書くことができる。ただし、aは素数、aの指数nおよびmは自然数で、$1<n<m$である。

ここで、上式(　)内は素数または素因子を含む数の積を示しているが、ここで、最大の奇数を素数とすると、その素数は、

$$f = \frac{1}{2}(1+a^{m-n}) \tag{2}$$

で表される。ただし、fはすべての素因子において最大の素数 (以後、最大素数) を示しており、$3 \le a$である。

ちなみに、$a=2$の場合は、素因子は奇数であることから、素数は

$$f = 1+2^{m-n} \tag{3}$$

で表される。

以下では、$3 \le a$の場合については (1) および (2) から、素数の累乗の和は、

$$c = 2a^n f = a^n(1+a^{m-n}) \tag{4}$$

と書くことができる。

また、(4) における素因子の積は

$$d = 2af \tag{5}$$

で表される。

(5) を AC 予想で表示すると、

$$d^{1+\varepsilon} = (2af)^{1+\varepsilon} < 2a^n f \tag{6}$$

で表される。

(6) から、素数の範囲は、

$$f < \frac{1}{2}a^{\frac{n-1}{\varepsilon}-1} \tag{7}$$

または、

$$\frac{a^s+1}{2} < \frac{1}{2}a^{\frac{n-1}{\varepsilon}-1} \tag{8}$$

で表される。ただし、 $s = m - n$ である。(以下同様)

(8) の右辺における a の指数部分を自然数として、

$$p = \frac{n-1}{\varepsilon} - 1 \tag{9}$$

で表されるとすれば、(7)、(8)、(9) から、

$$f = \frac{a^s+1}{2} < \frac{1}{2}a^p \tag{10}$$

で表される。

なお、p と ε の関係は、(9) から、

$$\varepsilon = \frac{n-1}{P+1} \tag{11}$$

を得る。ただし、$1 < n$ である。

さらに、

$$1+\varepsilon=\frac{p+n}{p+1} \tag{12}$$

が得られる。

一方、$a=2$ の場合は、（3）から素数の範囲は、

$$f=2^s+1<2^p \tag{13}$$

で表される。

AC 予想：$a=2$ のケース

（13）において f である素数を見つけるためには、奇数であることが条件となるために、ここで導かれた最大の奇数が素数となることから、偶数から1を引く必要がある。その素数 $\hat{f}$ は、

$$\hat{f}=2^p-1 \tag{14}$$

で表される。

これは、メルセンヌ素数[3]と呼ばれている素数と一致する。ちなみに、AC 予想はメルセンヌ素数が意味のある素数であることを示唆している。

AC 予想：$3\leq a$ のケース

３以上の素数は、

$$f=\frac{1+a^s}{2}<\frac{1}{2}a^p \tag{15}$$

が成立する。この範囲において、最も大きな奇数が素数となる可能性がある。ここでは、端数が0.5となるために、（15）から、

3 これについては、芹沢（2002、第8章）、西来路・清水（2015、pp.30-33）、小島（2021、pp.22-23、pp.52-59）等を参照せよ。

$$\hat{f} = \frac{1+a^s}{2} = \frac{1}{2}a^p - \frac{1}{2} \quad (16)$$

が成立する。これは一種の素数公式と言える。

なお、以下の表には、AC 予想を満たす素数を導出するために a を2、3、5の素数として、それぞれ乗数が10まで計算されている。

表　AC 予想を満たす素数

乗数	2の乗数	素数予想	3 の乗数 /2	素数予想	5の乗数 /2	素数予想
2	4	**3**	4.5	**3**	12.5	**11**
3	8	**7**	13.5	**11**	62.5	**61**
4	16	15	40.5	39	312.5	**311**
5	32	**31**	121.5	**121**	1562.5	1561
6	64	63	364.5	363	7812.5	7811
7	128	**127**	1093.5	**1093**	39062.5	39061
8	256	255	3280.5	3279	195312.5	**195311**
9	512	**511**	9841.5	**9841**	976562.5	**976561**
10	1024	1023	29524.5	29523	4882812.5	**4882811**

注）上表のゴシック体の数字は乗数10までの AC 予想を満たす素数を示している。

さらに、AC 予想のもとでの準 ABC 予想は、以下のように定義する。

「$a^n + b^n = c$ を満たす自然数の組 (a^n, b^n, c) に対して、互いに異なる素因数の積を d と表す。このとき、任意の ε（$0 < \varepsilon$）に対して、$d^{1+\varepsilon} < c$ を満たす組 (a^n, b^n, c) は有限個しか存在しない」（以下、「準 ABC 予想」）

ここで、AC 予想のもとで準 ABC 予想を踏まえると、同じ乗数を有する 2 つの異なる素数の和は、

$$a^s + b^s = c \quad (17)$$

で表される。上記の分析結果を用いると、（15）および（17）にもとづき a を b に変換した不等式は、それぞれ

$$\frac{1+a^s}{2}<\frac{1}{2}a^p \qquad (18)$$

および

$$\frac{1+b^s}{2}<\frac{1}{2}b^p \qquad (19)$$

で表される。

さらに、(18) と (19) を加えると、

$$\frac{1+a^s}{2}\cdot+\frac{1+b^s}{2}<\frac{1}{2}a^p+\frac{1}{2}b^p \qquad (20)$$

が得られる。また、(20) の両辺に2を乗じると、

$$a^s+b^s<a^s+b^s+2<a^p+b^p \qquad (21)$$

が導かれる。

準 ABC 予想の表示形式と (21) を踏まえると、

$$(2abk)^{1+\varepsilon}<(abc)^{1+\varepsilon}<a^s+b^s<a^s+b^s+2<a^p+b^p \qquad (22)$$

で表される。

ここで、素数の和は偶数であることから、必ず２で割れることになるために、c を2で除した数が素数 k であれば、 $c=2k$ として (22) は成立する。

ところで、 a^s+b^s+2 だけは、準 ABC 予想に反するために、この段階において、2をプラスされたことは、指数を上げることと同等と考えると、

$$a^s+b^s+2=(abc)^{1+\varepsilon+\gamma}<a^p+b^p \qquad (23)$$

と書くことができる。

さらに、(12) と (23) から、

$$(abc)^{1+\varepsilon+\gamma}=(abc)^{\frac{p+n}{p+1}+\gamma}<a^p+b^p \qquad (24)$$

で表される。（24）を ABC 予想の元式に戻すために、（24）に $p=1$を代入して整理すると、

$$(abc)^{\frac{n+1}{2}+\gamma} < (abc)^{1+\frac{n-1}{2}+\gamma} < a+b \tag{25}$$

が得られる。ここで , $\frac{n-1}{2}+\gamma$ を ε の表示にすると、ABC 予想の元式に戻ることになる。

$a^p+b^p=c$ の組み合わせは、 $p=1$において ABC 予想は成立する。

ちなみに、異なる素数の s 乗の和による ABC 予想が成り立たない場合でも、例えば、

$$a^s+b^s<(abc)^{1+\varepsilon} \tag{26}$$

の場合、

$$a^s+b^s<(abc)^{1+\varepsilon}<a^s+b^s+2=(abc)^{1+\varepsilon+\gamma}<a^p+b^p \tag{27}$$

であれば、（25）が得られ、ABC 予想は成立する。

これは、ABC 予想に反するケースも ABC 予想に沿うケースの両方を同時に説明している。

ここでは、準 ABC 予想によって、不等式間のパラメーターとしての乗数に変化が起こり、それによって ABC 予想へ回帰することが示された。このことからも ABC 予想における組み合わせは有限個存在することになる。ただし、これは理論上であり、ABC 予想にもとづくデータの存在については分からない。ここで登場するのが IUT 理論[4]ではないかと考えられる。

平均公式にもとづく ABC 予想

ここで、素因子が2、a、b のみで構成される場合、算術平均、幾何平均、調

4 この斬新な理論は、望月教授（京都大学）によるものであるが、これについては、加藤（2019）によって、分かり易く説明されている。

和平均の大きさの関係から、

$$\frac{2ab}{a+b} < 2(ab)^{\frac{1}{2}} < a+b \tag{28}$$

を ABC 予想へ応用する。

ここで、$b<a$ で a が b よりかなり大きいとすると、$\frac{b}{a} \to 0$ から調和平均は、

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} = 2b \tag{29}$$

で表される。（29）を（28）へ代入すると、

$$4b < 2(ab)^{\frac{1}{2}} < a+b \tag{30}$$

で表される。ここで、調和平均のパラメーターを $1+\varepsilon$ として、調和平均を幾何平均に近づけることは、$2(2b)^{1+\varepsilon} \to 2(ab)^{\frac{1}{2}}$ を意味する。

それゆえ、実際 a は存在するものの a が消去された形での ABC 予想は、

$$(2b)^{1+\varepsilon} < a+b \tag{31}$$

と書くことができる。したがって、b より a が大きく、その差がかなり大きい場合は、a が存在するにも関わらず a が消去されたものとして ABC 予想が成り立つと考えることができる。

ちなみに、調和平均が幾何平均に近接していく条件は、

$$1+\varepsilon \to 1+\frac{\frac{1}{2}\log ab - \log 2b}{\log 2b} \tag{32}$$

である。さらに、（32）から、

$$0<\varepsilon \to \frac{\frac{1}{2}\log ab-\log 2b}{\log 2b} \tag{33}$$

である。そこで、(33) から$4b<a$であれば、$0<\varepsilon$ である。

さらに、(31) から、b があっても構わないが、(31) の右辺を簡単化すると、

$$(2b)^{1+\varepsilon}<a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a \tag{34}$$

である、素数 a の範囲は、(34) から、

$$(2b)^{1+\varepsilon}<a \tag{35}$$

で表される。したがって、(35) の左辺は偶数であることから、

$$(2b)^{1+\varepsilon}+1\leq a \tag{36}$$

を満たす奇数が素数となる可能性がある。

例として、素数 $b=3$ 、$\varepsilon=1$を (36) へ代入すると、

$$6^2+1=37\leq a \tag{37}$$

が得られる。素数 は37である。

ABC 予想は、１つの素数からより大きな素数を求めるための１つの方法であると考えられる。(36) を用いた素数の導出については、コンピューターに任せるしかない。

(31) は、ほとんどすべての自然数の組み合わせに対して通じるものであるが、素数は自然数に含まれ、無限に存在すると言われているが、２つの素数の大きさにかなりの差があり、素因子の積の制約と素数の積が調和平均から幾何平均の間で存在する組み合わせを決めるという意味においては、ABC 予想における有限個の組み合わせが存在する。

おわりに

ここでは、まずABC予想にもとづいてAC予想を設定して、素因数分解の困難な式は避け、単純に同じ素数の異なる累乗の形を使うことによって、素数を導く方法を示した。ついで、準ABC予想を設定することによって、異なる素数で、累乗が同じ場合の不等式を導いた。そこにおいて、秩序が異なる部分に着目して、指数部分を変化させることによってABC予想を回帰させた。

なお、ここでは、困難な因数分解を避けて、関数上の２で除された最大の奇数を素数として計算されており、直接、ABC予想を解くことは、素数と因数分解に法則性があることを証明することとなるので、中々難しいことが分かった。

さらに、算術平均、幾何平均、調和平均の関係および素数間の大きな差を仮定すると、ABC予想が成立しそうであり、そこから素数から素数を導出する方法が導かれた。

本研究のプロセスにおいて、完璧なABC予想は解けないものの全体を通じて、素数を導出するためのいくつかの方法が導かれた。そこでは原文は読んでいないが、メルセンヌ素数の理論的ストーリーが分かったような気がする。

最後に、僭越ながら、ABC予想とは素数を導くために構築された予想ではないかと思う次第である。

参考文献

加藤文元『宇宙と宇宙をつなぐ数学』角川書店、2019年。
黒川信重「付録 数論の有名な予想のいくつか（1)abc予想」『リーマン予想の探求 ABCからZまで』技術評論社、2012年。
黒川信重・小山信也『ABC予想入門』PHP研究所、2018年。
小島寛之『素数ほどステキな数はない』技術評論社、2021年。
小山信也『日本一わかりやすいABC予想』ビジネス教育出版社、2021年。

芹沢正三『素数入門』講談社ブルーバックス、2002年。
田口雄一郎 . “abc 予想の話” . 東京工業大学 理学院 数学系 . 2022年 4 月16日閲覧。
西来路文朗・清水健一『素数が奏でる物語』講談社ブルーバックス、2015年。
山崎 , 隆雄「フェルマー予想と ABC 予想（PDF）」『数学セミナー』2010年10月、2022年4月16日閲覧。
横山明日希「ABC 予想」『数式図鑑』講談社ブルーバックス、2022年。