Moment Map のすすめ（III）

池　森　　　均
北　門　新　作
佐　藤　俊　郎
松　井　吉　光

要　　約：Moment map とは、力学系における保存量としての運動量などの概念を一般化して、symplectic manifold 上の幾何学的な量に対する群の作用によって定義した写像を意味する。数学的な moment map の定義は、物理的直感が利かず、物理学者にとってはなかなか馴染みにくい。そこで、本稿では moment map の定義を物理学的に解釈し、またそれに関わる重要な帰結を物理学の立場で整理し、その重要性について考察する。前稿までは、「Moment Map のすすめ（Ｉ）」において有限次元の力学系について考察し、「Moment Map のすすめ（II）」において無限次元の力学系としての gauge 場の理論について考察した。本稿では、有限次元の力学系の場合に明らかに出来ていなかった保存量と moment map の関係について考察する。その結果、３次元空間における Kepler 問題の保存量である Runge-Lenz vector は、４次元調和振動子の位相空間の symplectic 幾何学に関わる SO(4) moment map を Kustaanheimo-Stiefel 変換によって３次元に symplectic 縮約したものであることを示す。

キーワード：Moment map、Symplectic manifold

1. はじめに

力学的エネルギー、運動量、角運動量、これらはひとつの力学系において保存量として知られている物理量である。即ち、ある力のもとで力学的対象である物体の運動を考えるとき、それらは常に一定の値に保たれるという意味をもっている。ところが、これらの量は別の側面を持っている。それは、運動の時間発展の生成子という側面である。たとえば、運動量は並進運動を引き起こす生成子であり、角運動量はある軸のまわりの回転運動を引き起こす生成子である。これらは、数学的に言えば symplectic manifold における moment map という概念で表現される［1］。即ち、moment map とは phase space の座標 (q_i, p_i) に対して群 G を作用させたときに、その作用した後の phase space が再び

symplectic であることが保証される（即ち、symplectic 2-form が保存される）ような群作用の生成子のことである。簡単に言えば、無限小正準変換の生成子ということである。

この定義の意味だけで考えると、moment map は何か具体的な物理量である必要はなく、物理量とは無関係にその存在を考えることができるものであるかのような印象を受ける。ところが、moment map として紹介されるものは、ほとんどがある力学系における保存量であって、例えば上で紹介した通り運動量や角運動量などは保存量であると同時に空間の対称性に関係する群作用の moment map でもある。

一方、保存量のすべてが moment map の条件を満たすかといえば、そうではない場合が存在する。例えば、Kepler 問題の力学系における Runge-Lenz (RL) vector がその典型的な例である［2］。RL vector は、$1/r^2$に比例する中心力が存在する力学系においてのみ保存することが知られている特別な保存量である。RL vector は moment map である角運動量と組んで SO(4) (SO(3) × SO(3)) 群の algebra を満たす。しかし、後で述べるようにそのままでは所謂 moment map の定義を満たしてはいない。この点については、前著「Moment Map のすすめ（Ｉ）」で詳しく述べた［3］。しかし、その後この点に関して更に詳しく調べた結果、以下のようなことが分かった［4］。

２次元 Euclid 空間の phase space は、正準変換である Levi-Civita 変換［5］により異なる座標の phase space で表現することができる。その際、元の座標系で表された調和振動子系は、新しい座標系では Kepler 問題の力学系になることが知られている［6］。これと同様に 4 次元 Euclid 空間における phase space は Kustaanheimo-Stiefel (KS) 変換［7］により３次元 Euclid 空間における phase space に symplectic 性を保ちながら次元を落とすことができる。これを Marsden-Weinstein（MW) の定理と言う［8］。その際、特に４次元の調和振動子系は KS 変換により３次元の Kepler 問題の力学系と結びついていることが分かっている［9］［10］［11］。

４次元空間の調和振動子系では Hamiltonian や角運動量以外にも幾つかの保存量が存在する［12］。これらの保存量は、それらの適当な線形結合の組み合わせを考えると、角運動量と合わせて phase space 上での SO(4) 回転の生成子になることがわかる。ただし、この生成子は調和振動子の保存量から見つけることができるが、本来具体的に力学系が何か（つまり、調和振動子系であるなし）に関わらず４次元空間の phase space 上で必ず存在するものであるということは気を付けておくべきであろう。そして、まさにそれが４次元空間の phase space ($\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$) における SO(4) 群作用の moment map の条件を満たしていることがわかる。さらに、その moment map を、KS 変換によって３次元に symplectic reduction すると、それが RL vector になることが分かる。

即ち、RL vector は 4 次元空間の phase space における SO(4) 回転の moment map が、KS 変換により３次元空間の phase space に reduction したときの表現であるということである。さらにこの事実はこれまで考えられていたように RL vector が力学系に固有の保存量であるというよりも、その他の保存量と同じように phase space の幾何学的な対称性から導かれる保存量であることが分かる。これらの事実は geometric algebra の記法を用いると、比較的容易に示すことができる。この論文はその方法を用いて上述の事実を確認することが目的である。

この論文の内容は、以下の通りである。まず次の章では moment map の定義を示し、簡単な例として調和振動子の Hamiltonian や角運動量が moment map であることを紹介

する。次に、3次元 Kepler 問題の力学系ではRL vector が保存量として存在し、それは Kepler 問題の力学系固有の保存量でありmoment map の条件を満たしていないことを示す。その後、4次元調和振動子系における保存量の一部が phase space 内の SO(4) 群に関する moment map となることを示す。さらに、KS 変換を紹介し、4次元の調和振動子と3次元 Kepler 問題の関係を geometric algebra を用いて明らかにする。最後に、4次元調和振動子系での保存量であり、且つSO(4) moment map となるものが、KS 変換によって3次元空間では RL vector となることを、geometric algebra の方法を用いて具体的に示す。なお、本稿は英文で発表した論文 “Runge-Lenz Vector as a 3d Projection of SO(4) Moment Map in $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ Phase Space” [4] の成果を踏まえて、これを日本語で解説・補足し「Moment Map のすすめ」の位置付けに適した内容として発表することを目的として記した論説である。

2. Moment Map

moment map を数学的に定義すると、以下のようになる。

symplectic manifold（即ち、閉じていて非退化な symplectic 2-form ω が備わっている manifold) M があって、その manifold に対して Lie 群 G が作用するとき、写像

$$\mu \ : \ M \to \mathfrak{g}^*$$

が以下の条件を満たす場合、μ を moment map という。

1. 任意の $x \in M$ に対して $\mu(g \cdot x) = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\mu(x)$ $(g \in G)$ が成立し、
2. G の作用による tangent vector field X に対して、$i_X\omega = d\mu$ が成り立つ。

まず 1. は μ が equivariant であるということを保証する条件である。2. は重要な意味を持っていて、2-form に対する tangent vector field X 方向への Lie 微分が

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d(i_X\omega)$$

で定義されることから、ω が symplectic 2-form であるとすれば、$i_X\omega = d\mu$ は $\mathcal{L}_X\omega = 0$ であるための、即ち X 方向への ω の不変性を保つための必要十分条件となっている。

上述が moment map の数学的な定義であるが、それを物理学的な言葉で簡単に言えば、ある種の変換が ω を不変にするということは、その変換が正準変換であり、moment map はその正準変換の生成子であるということである。

ところで、ある manifold 上の座標を x_μ としたとき、その座標がある作用により parameter t で変化する場合の tangent vector field X は、

$$X = \frac{d}{dt} = \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

で定義される。特にその manifold が、一般化座標と一般化運動量 (q_i, p_i) を座標とする phase space $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ であるときの tangent vector field は

$$X = \left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial q_i} + \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

と書くことが出来る。ここで、もし

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q_i}$$

を満たすような関数 h があったとすると、そのときの tangent vector field を Hamiltonian vector field X_h と呼び、

$$\frac{d}{dt} = X_h = \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} = -\{h, \cdot\}$$

と書くことができる。この結果から明らか

なように、h は phase space に作用する変換の generator となっている。もし今考えている作用が群 G によるものである場合、この h が上で数学的に定義された moment map μ である。この事実は以下のようにしてわかる：

このℎが存在して、その tangent vector field が上のように Hamiltonian vector field X_h で書けたとすると

$$\begin{aligned} i_X\omega &\equiv \omega(X,\cdot) \\ &= dq_i \wedge dp_i \left(\left.\frac{dq_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial q_i} + \left.\frac{dp_i}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &= dq_i \wedge dp_i \left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial h}{\partial q_i} dq_i \\ &= dh \end{aligned}$$

となる。これは、まさに h は moment map の定義のなかの２つ目の条件を満たしていることが分かる。つまり、群が phase space に作用することによる tangent vector field が Hamiltonian vector field として表現できるということと、tangent vector field X と ω との interior product が、ある関数 h の全微分 dh と書けるということは等価であり、これらの条件が満たされているということは、群の作用が symplectomorphic であること、即ち正準変換になっているということが保証されたことと等価である。

要するに、「phase space に対する群の作用による変換が(無限小)正準変換になっているときには必ず moment map が存在し、それはその(無限小)正準変換の generator である。」ということができる。

ではここからは、もう少し具体的に moment map としてどのようなものが考えられるかを見ていくことにしよう。

2.1. 調和振動子の Hamiltonian

まず初めの例として、調和振動子の Hamiltonian $h = \frac{1}{2}\left(p_i^2 + q_i^2\right)$ が moment map であることを示す。ただし、ここでは問題を見やすくするために運動する粒子の質量や potential 項の係数は１としている。

このとき、phase space は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ で、その座標は一般化座標と一般化運動量により (q_i, p_i) で張られており、symplectic 2-form は $\omega = dq_i \wedge dp_i$ で表される。

ところで、群 G による phase space 上の作用というだけならいろいろ考えられるはずだが、ここでは G は $U(1)$ で、$x_\mu \equiv (q_i, p_i)$ に対して

$$x_\mu \to x_\mu(t) = (q_i, p_i)e^{i\lambda\sigma_2 t}$$

のように作用する場合を考えよう。すると

$$\left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} = \lambda(q_i, p_i)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda(-p_i, q_i)$$

なので、このとき tangent vector field は

$$\begin{aligned} X &= \left.\frac{dx_\mu}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ &= \lambda(-p_i, q_i)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial}{\partial p_i} \end{pmatrix} \\ &= \lambda\left(-p_i\frac{\partial}{\partial q_i} + q_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \end{aligned}$$

と表される。それを $\omega(X,\cdot) = dh$ の式に代入すると、直ちに

$$p_i dp_i + q_i dq_i = dh$$

となることがわかる。即ち、この式が成立するためには、

$$h = \frac{1}{2}(p_i^2 + q_i^2)$$

でなければならないことがわかる。これがこの場合の moment map ということである。これは調和振動子の Hamiltonian そのものであり、言い換えれば調和振動子の Hamiltonian は、上のような phase space への U(1) 群の作用による moment map だということが出来る。

2.2. 角運動量

次に、ここでは角運動量が moment map であることを見てみよう。3次元空間においては角運動量は3つあるので、それを μ_i $(i = 1, 2, 3)$ と書くことにする。

角運動量は一般化座標と一般化運動量を3次元回転させることに相当するので、manifold 上の座標に作用する群は SO(3) 群である。この群を具体的に作用させるときの表現は色々あるが、今は Pauli 行列を利用して次のように表現することにする。

$$\begin{aligned}(q_i, p_i)\sigma_i &= (q_i\sigma_i,\ p_i\sigma_i)\\ &\to e^{i\lambda_j\sigma_j}t(q_i\sigma_i,\ p_i\sigma_i)e^{-i\lambda_j\sigma_j t}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(e^{i\lambda_j\sigma_j t}q_i\sigma_i e^{-i\lambda_j\sigma_j t}\right)\Big|_{t=0}\\ &= i\lambda_i q_j[\sigma_i, \sigma_j]\\ &= -2\epsilon_{ijk}\lambda_i q_j\sigma_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(e^{i\lambda_j\sigma_j t}p_i\sigma_i e^{-i\lambda_j\sigma_j t}\right)\Big|_{t=0}\\ &= i\lambda_i p_j[\sigma_i, \sigma_j]\\ &= -2\epsilon_{ijk}\lambda_i p_j\sigma_k\end{aligned}$$

となり、tangent vector field は

$$X = \frac{dx_\mu}{dt}\Big|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$\begin{aligned}&= -2\lambda_i(\epsilon_{ijk}q_j, \epsilon_{ijk}p_j)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial q_k}\\ \\ \dfrac{\partial}{\partial p_k}\end{pmatrix}\\ &= -2\lambda_i\left(\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial q_k} + \epsilon_{ijk}p_j\frac{\partial}{\partial p_k}\right)\end{aligned}$$

となることがわかる。したがって

$$\begin{aligned}\omega(X_i, \cdot) &= (\epsilon_{ijk}p_j dq_k - \epsilon_{ijk}q_j dp_k)\\ &= d(\epsilon_{ijk}q_j p_k)\end{aligned}$$

となり

$$\mu_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k$$

が得られる。この moment map はまさに角運動量である。

3. Kepler 問題と Runge-Lenz Vector

Kepler 問題の力学系には Hamiltonian や角運動量のような保存量とは別に、Runge-Lenz (RL) vector という保存量が存在する。RL vector は調和振動子の力学系には現れない保存量であり、その意味においては、そのまま phase space の幾何学に関係するようなものではなく、dynamics の形に依存する保存量である。

まず、どのように RL vector が導かれるかを示して置く。

3次元空間の Kepler 問題の力学系において運動方程式は、位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$ とすると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

と表される。当然、この系は中心力なので角運動量が保存する。

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = 0$$

次に、運動方程式 (1) に、右から $\boldsymbol{L}$ の外積を

とると

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\}\\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \dot{\boldsymbol{r}} \times (\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}) + \dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}})\\ &= \ddot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\end{aligned}$$

であるから運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\} = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})$$

と書き換えられる。また、右辺は

$$\frac{\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})}{r^3} = \frac{(\boldsymbol{r} \cdot \dot{\boldsymbol{r}})\boldsymbol{r} - r^2\dot{\boldsymbol{r}}}{r^3} = -\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

より

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}})\} = k\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

と書き換えることができる。よって、すべて左辺に移項してみると

$$\frac{d}{dt}\left\{\dot{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) - k\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right\} = 0$$

となり、括弧の中身が時間的に不変であること、即ち保存量であることが分かる。この括弧の中身が所謂 RL vector である。このように RL vector には Kepler のポテンシャル項に由来する項が必要である。つまり RL vector は Kepler 問題の力学系特有の保存量であり、一見すると phase space の無限小回転を引き起こす生成子のようには見えないので、moment map とは無関係に思われる。しかし、もし質点が楕円軌道を描いているとすると、即ち、Kepler 問題における力学的エネルギー E が $E<0$ を満たしているとすると、RL vector を $\tilde{A}_i = A_i/\sqrt{-2E}$ と normalize することにより、角運動量 μ_i と $\tilde{A}_i$は

$$\{\mu_i, \mu_j\} = \epsilon_{ijk}\mu_k \tag{2}$$

$$\{\mu_i, \tilde{A}_j\} = \epsilon_{ijk}\tilde{A}_k \tag{3}$$

$$\{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\} = \epsilon_{ijk}\mu_k \tag{4}$$

という構造を持つ。即ち、RL vector は moment map である角運動量とペアを組んで $\mathfrak{so}(3)_{\mathrm{L}} \times \mathfrak{so}(3)_{\mathrm{R}} \sim \mathfrak{so}(4)$ の代数を満たす generator になっていることが分かっている。この事実は、RL vector が何らかの形で moment map と関りを持っているはずだということを示唆していると考えられる。

4. 4次元調和振動子の保存量と SO(4) Moment Map

3 次元空間の Kepler 問題における RL vector と 4 次元空間の phase space における moment map の関係を調べるためには、まず 4 次元空間の phase space に存在する SO(4) 回転を生成する moment map を見つける必要がある。その見つけ方としては、moment map はこれまで調和振動子系の保存量として見つかっているという事実を踏まえ、まず 4 次元の調和振動子系を考え、その保存量の組み合わせを考えるという手続を踏めばよい。

4 次元の調和振動子系では、保存量として Hamiltonian

$$H = \sum_{\alpha=0}^{3}\left(\frac{1}{2}p_\alpha^2 + \frac{1}{2}q_\alpha^2\right) \tag{5}$$

と角運動量

$$L_i^{L(R)} = q_i p_0 - q_0 p_i \pm \epsilon_{ijk} q_j p_k \quad (i = 1, 2, 3) \tag{6}$$

が存在することはよく知られているが、それ以外にも

$$J_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta + q_\alpha q_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{7}$$

という保存量が存在することが分かっている［12］。

これらの保存量を使って以下のような組み合わせを考える。

$$K_1 = \frac{1}{2}(J_{13} - J_{02}) \tag{8}$$
$$K_2 = \frac{1}{2}(J_{01} + J_{23})$$
$$K_3 = \frac{1}{4}(J_{00} + J_{33} - J_{11} - J_{22})$$

もちろん、この K_i も保存量の線形結合なので調和振動子系の保存量である。例えばこれらと角運動量の一部 L_i^L を組み合わせると SO(4) の algebra

$$\{L_i^L, L_j^L\} = \epsilon_{ijk} L_k^L \tag{9}$$
$$\{L_i^L, K_j\} = \epsilon_{ijk} K_k \tag{10}$$
$$\{K_i, K_j\} = \epsilon_{ijk} L_k^L \tag{11}$$

を満たすことは、計算をしてみれば簡単に分かる。

ところで、これらは phase space 内での無限小回転を生成する。例えばここでは具体的に K_1 によって生成される無限小回転の結果を示すと

$$\{K_1, q_0\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, q_0\} = \frac{1}{2}p_2$$
$$\{K_1, q_1\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, q_1\} = -\frac{1}{2}p_3$$
$$\{K_1, q_2\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, q_2\} = \frac{1}{2}p_0$$
$$\{K_1, q_3\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, q_3\} = -\frac{1}{2}p_1$$
$$\{K_1, p_0\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, p_0\} = -\frac{1}{2}q_2$$
$$\{K_1, p_1\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, p_1\} = \frac{1}{2}q_3$$
$$\{K_1, p_2\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, p_2\} = -\frac{1}{2}q_0$$
$$\{K_1, p_3\} = \frac{1}{2}\{J_{13} - J_{02}, p_3\} = \frac{1}{2}q_1$$

となる。(Appendix で K_1 を含め残りの具体的な結果を示しておく。) 更に、これらの無限小回転は行列 Σ_i，Λ_i で表現することができて、例えば K_1に対応する行列 Σ_1を示すと

$$\Sigma_1 \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_2 \\ -p_3 \\ p_0 \\ -p_1 \\ -q_2 \\ q_3 \\ -q_0 \\ 2q_1 \end{pmatrix}$$

となる。（これらについても残りの結果は Appendix を参照）当然ながら、このように得られた Σ_i, Λ_i は SO(4) の algebra

$$\{i\Lambda_i, i\Lambda_j\} = \epsilon_{ijk} i\Lambda_k$$
$$\{i\Lambda_i, i\Sigma_j\} = \epsilon_{ijk} i\Sigma_k$$
$$\{i\Sigma_i, i\Sigma_j\} = \epsilon_{ijk} i\Lambda$$

を満たすことは容易に示すことができる。さらに $\Omega_i^L = \dfrac{\Lambda_i - \Sigma_i}{2}$，$\Omega_i^R = \dfrac{\Lambda_i + \Sigma_i}{2}$ とすると Ω_i^L, Ω_i^R はそれぞれ SO(3) $_L$ と SO(3) $_R$ の algebra を満たすことは明らかである。これらの結果を用いて SO(4) 無限小回転うち、Ω_i^L による回転の tangent vector field を作る

と

$$A = e^{i\Omega_a^L \lambda_a t} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \simeq (1 + i\Omega_a^L \lambda_a t) \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \tag{12}$$

ただし、

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}, \ Q_2 = \begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

と表すことにより tangent vector field は

$$\begin{aligned} X &= \frac{d}{dt} = \left.\frac{dA^T}{dt}\right|_{t=0} \frac{\partial}{\partial A} \\ &= i(Q^T, P^T)(\Omega_a^L)^T \lambda_a \begin{pmatrix} \partial_Q \\ \partial_P \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ただし

$$\frac{\partial}{\partial A} = \begin{pmatrix} \partial_Q \\ \partial_P \end{pmatrix},$$

$$\partial_Q = \begin{pmatrix} \partial_{Q_1} \\ \partial_{Q_2} \end{pmatrix}, \ \partial_{Q_1} = \begin{pmatrix} \partial_{q_0} \\ \partial_{q_1} \end{pmatrix}, \ \partial_{Q_2} = \begin{pmatrix} \partial_{q_2} \\ \partial_{q_3} \end{pmatrix},$$

$$\partial_P = \begin{pmatrix} \partial_{P_1} \\ \partial_{P_2} \end{pmatrix}, \ \partial_{P_1} = \begin{pmatrix} \partial_{p_0} \\ \partial_{p_1} \end{pmatrix}, \ \partial_{P_2} = \begin{pmatrix} \partial_{p_2} \\ \partial_{p_3} \end{pmatrix}$$

と表すことができる。これを用いて symplectic 2-form $\omega = dq_\alpha \wedge dp_\alpha$ との interior product を計算すると、

$$\omega(X, \cdot) = d(L_a^L - K_a)\lambda_a \tag{13}$$

となることが容易に確かめられる。また同様に (12) において Ω_i^L の代わりに Ω_i^R を用いれば $L_a^L + K_a$ も同じように上の式を満たすことが分かる。この結果は、まさに $L_a^L \pm K_a$ が 4 次元空間の phase space における SO(4) moment map であることを示している。

5. Kustaanheimo-Stiefel 変換

ここで、3 次元空間における RL vector と 4 次元空間の phase space における SO(4) moment map との関係を理解するために、KS 変換による symplectic reduction と Marsden & Weinstein (MW) 定理について紹介しておく。

MW 定理と symplectic quotient の定義は、数学的には以下のようなものである。:

M を symplectic 2-form ω が備わっている symplectic manifold とする。また、compact Lie 群 G が M に作用し、そのときの moment map を μ とする。そのとき、写像 $i : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ は包含写像 (inclusion) であり、G は自由に $\mu^{-1}(0)$ に作用すると仮定する。そのとき

- 軌道空間 $M_{\text{red}} = \mu^{-1}(0)/G$ は manifold である。
- 写像 $: \pi : \mu^{-1}(0) \to M_{\text{red}}$ は principal G -bundle であり
- M_{red} には $i^*\omega = \pi^*\omega_{\text{red}}$ を満たす symplectic 2-form ω_{red} が存在する。

これが MW 定理であり、$(M_{\text{red}}, \omega_{\text{red}})$ は (M, ω) の G, μ についての symplectic quotient、もしくは Marsden-Weinstein-Meyer quotient と呼ばれ、このように次元を落とすことを symplectic reduction と呼ぶ。

簡単に言えば、MW 定理とは、ある constraint のひとつである moment map により自由度を一つ減らすことで、symplectic 2-form を不変に保ちながら空間の次元を一つ落とすことができるということを言っている。つまり、異なる次元への正準変換の一般化ということができる。

特に、4 次元空間を 3 次元空間に落とすような symplectic reduction を Kustaanheimo-

Stiefel (KS) 変換という。

KS 変換の表現方法は色々あるが、この論文では geometric algebra の方法を用いることにする。Geometric algebra とは

$$\boldsymbol{\sigma}_i\boldsymbol{\sigma}_j+\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_i=2\delta_{ij} \tag{14}$$

を満たす基底 $\boldsymbol{\sigma}_i$ を用いた表現方法で、例えば４次元空間の座標と運動量を

$$Q=q_0+q_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+q_2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+q_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$$
$$P=p_0-p_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3-p_2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1-p_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$$

のように表す。この定義によると

$$QQ^\dagger=Q^\dagger Q=2(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)\equiv 2r \tag{15}$$

となる。ここで３次元空間の座標を x_i とする。すると Q を使って KS 変換を表すと

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger \tag{16}$$

となる。詳しく成分で中身を見てみると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\equiv&x_1\boldsymbol{\sigma}_1+x_2\boldsymbol{\sigma}_2+x_3\boldsymbol{\sigma}_3\\=&(q_1q_3-q_0q_2)\boldsymbol{\sigma}_1+(q_1q_0+q_2q_3)\boldsymbol{\sigma}_2\\&+\frac{1}{2}(q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2)\boldsymbol{\sigma}_3\end{aligned}$$

であり、

$$\boldsymbol{x}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2 \tag{17}$$

であることがわかる。さらにこれより

$$\dot{x}_1=\dot{q}_1q_3+q_1\dot{q}_3-\dot{q}_0q_2-q_0\dot{q}_2$$
$$\dot{x}_2=\dot{q}_0q_1+q_0\dot{q}_1+\dot{q}_2q_3+q_2\dot{q}_3$$
$$\dot{x}_3=\dot{q}_0q_0+\dot{q}_3q_3-\dot{q}_1q_1-\dot{q}_2q_2$$

となり、また次のような量を定義する。

$$\frac{\mu}{r}\equiv\dot{q}_0q_3-q_0\dot{q}_3+\dot{q}_1q_2-q_1\dot{q}_2 \tag{18}$$

この μ は KS 変換をする際に自由度を減らすために固定する moment map になる量であり、もし $\mu=0$ であると仮定すると

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2+\mu^2\\&=\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\\&=(q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2)(\dot{q}_0^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)\\&\equiv r(\dot{q}_0^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)\end{aligned}$$

であることが分かる。このことから、３次元の力学系の Lagrangian

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2+\mu^2)+V(x_i)$$

は４次元の座標 q_μ で表すと

$$L=\frac{1}{2}r(\dot{q}_0^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+V(q_\mu)$$

と書き換えられる。ここで V は x_i あるいは q_μ に依存するポテンシャル項である。これにより４次元座標に対する一般化運動量は

$$p_\mu\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\mu}=r\dot{q}_\mu$$

で与えられることが分かる。これを用いると３次元空間の運動量 $\boldsymbol{\pi}$ は geometric algebra の記法では

$$\boldsymbol{\pi}=\frac{1}{r}\langle Q\boldsymbol{\sigma}_3P\rangle_1 \tag{19}$$

と表されることがわかる。ただし、$\langle A\rangle_i$ は multivector A の grade-i の部分を意味する。ここで grade の定義について補足しておく。３次元ユークリッド空間の場合、vector $\boldsymbol{a}$ は geometric algebra では

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{\sigma}_1+a_2\boldsymbol{\sigma}_2+a_3\boldsymbol{\sigma}_3,$$

と表される。これは $\boldsymbol{\sigma}_i$ を持つ項だけで表されているので、その形から grade 1 を持つ量であると言われる。(14) により、任意の２つの vector の geometric product は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{ab}=&a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\&+(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1\\
&+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\\
=&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},
\end{aligned}
$$

と表される。このとき、内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は grade 0であり、外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は grade 2であることがわかる。3次元空間では、もっとも一般的な multivector は

$$
A=\langle A\rangle_0+\langle A\rangle_1+\langle A\rangle_2+\langle A\rangle_3
$$

と表される。つまり、3次元では grade 3を超える grade の項は存在しない。なぜならば grade 3の項は $\langle A\rangle_3$ であるが具体的には

$$
I=\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3.
$$

というものしか存在せず、これに任意の $\boldsymbol{\sigma}_i$ をかけて grade を上げようとしても grade は (14) より逆に grade 2に下がってしまうためである。

ところで、4次元の調和振動子系は、KS 変換によって3次元空間となった世界では Kepler 問題の力学系になることが知られている。この事実は geometric algebra で容易に示すことができる。

4次元空間の調和振動子の Hamiltonian (5) 式は geometric algebra の記法では

$$
H=\frac{1}{2}P^\dagger P+\frac{\lambda^2}{2}QQ^\dagger
$$

と表される[1]。これは Q,P の性質を使って変形していくと

$$
\begin{aligned}
H&=\frac{1}{2}P^\dagger P+\frac{\lambda^2}{2}QQ^\dagger\\
&=\frac{1}{2}P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}Q\boldsymbol{\sigma}_3P+\frac{\lambda^2}{2}Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger\\
&=\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{2}P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger Q\boldsymbol{\sigma}_3P+\frac{\lambda^2}{2}Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger\right)
\end{aligned}
$$

となり、(16),(17),(19) 式と

$$
\begin{aligned}
&Q\boldsymbol{\sigma}_3P=\pi_1\boldsymbol{\sigma}_1+\pi_2\boldsymbol{\sigma}_2+\pi_3\boldsymbol{\sigma}_3+\mu\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3\\
&P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger=\pi_1\boldsymbol{\sigma}_1+\pi_2\boldsymbol{\sigma}_2+\pi_3\boldsymbol{\sigma}_3-\mu\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3
\end{aligned}
$$

であることを使えば、$\mu=0$ とすると

$$
H=\frac{r}{4}\boldsymbol{\pi}^2+\lambda^2r
$$

となる。ここで、この Hamiltonian を $2\lambda^2=-h,\ 2H=k$ という関係を使って書き直す。そのとき、両辺を r で割ると、原点を除き

$$
h=\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2-\frac{k}{r}
$$

という形に表すことができる。これはまさに3次元空間の Kepler 問題の Hamiltonian である。

もちろん、h はもとの Hamiltonian そのものではなく、もとはポテンシャル項の係数である。つまり、ポテンシャル項の係数と Hamiltonian の役割がお互いに入れ替わっているので、上の結果はそのまま二つの力学系が同等 (equivalent) であるという意味ではない。しかも、この関係は $h=-2\lambda^2<0$ のときにのみ成立する。つまり Kepler 問題の力学系では閉じた軌道運動をする場合にのみ成立する関係である。しかし、KS 変換は次元は異なるが symplectic 2-form を不変に保つ変換なので正準変換のひとつである。したがって、Kepler 問題の力学系において閉じた軌道のエネルギーの値をあるひとつの値に固定した運動を考える限り、その値を4次元調和振動子の力学系のポテンシャル項の係数と見做して同じ運動として取り扱うことが出来るという関係があることを意味している。

[1] これまでは、計算の煩雑さを避けるために調和振動子のポテンシャル項の係数を1として議論してきたが、ここからはポテンシャル項の係数自体が重要な役割を演じるので、1ではなく λ^2 として考えていくことにする。

6. Moment Map としての Runge-Lenz Vector

さて、前章の議論により geometric algebra を利用すると、4 次元調和振動子の力学系と 3 次元 Kepler 問題の力学系を結びつける KS 変換を簡単に示すことができた。そこで、3 次元の RL vector は 4 次元の phase space の moment map とどのように関係づけられるかについても geometric algebra を用いれば簡単に示すことができるであろうことが、容易に想像できる。そこで、ここではその問題について考察する。

ところで、4 次元の調和振動子系における保存量 (7) 式を使って次のような量を考える。

$$
\begin{aligned}
&P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3P+\lambda^2Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger \qquad (20)\\
=&\left\{(p_1p_3-p_0p_2)+\lambda^2(q_1q_3-q_0q_2)\right\}\boldsymbol{\sigma}_1\\
&+\left\{(p_0p_1+p_2p_3)+\lambda^2(q_0q_1+q_2q_3)\right\}\boldsymbol{\sigma}_2\\
&+\left\{\frac{1}{2}(p_0^2+p_3^2-p_1^2-p_2^2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\lambda^2(q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2)\right\}\boldsymbol{\sigma}_3\\
\equiv&(J_{13}-J_{02})\boldsymbol{\sigma}_1+(J_{01}+J_{23})\boldsymbol{\sigma}_2\\
&+\frac{1}{2}(J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22})\boldsymbol{\sigma}_3
\end{aligned}
$$

この式は前節で紹介した調和振動子系の保存量であり SO(4) moment map であるところの (8) 式を geometric algebra の記法で表現したものである。ただし、moment map = 0 を仮定している。すると、

$$
\begin{aligned}
&Q\boldsymbol{\sigma}_3P\\
=&(q_0+q_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3+q_2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1+q_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\\
&\times\boldsymbol{\sigma}_3(p_0-p_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3-p_2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1-p_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\\
=&(q_0\boldsymbol{\sigma}_3+q_1\boldsymbol{\sigma}_2-q_2\boldsymbol{\sigma}_1+q_3I)\\
&\times\boldsymbol{\sigma}_3(p_0-p_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3-p_2\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{\sigma}_1-p_3\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2)\\
=&(q_1p_3+q_3p_1-q_0p_2-q_2p_0)\boldsymbol{\sigma}_1\\
&+(q_0p_1+q_1p_0+q_2p_3+q_3p_2)\boldsymbol{\sigma}_2\\
&+(q_0p_0+q_3p_3-q_1p_1-q_2p_2)\boldsymbol{\sigma}_3\\
&+(q_3p_0-q_0p_3+q_2p_1-q_1p_2)\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{\sigma}_3
\end{aligned}
$$

なので、$\mu=\langle Q\boldsymbol{\sigma}_3P\rangle_3=0$ ならば、

$$
Q\boldsymbol{\sigma}_3P=P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger
$$

であることが分かる。これを踏まえて (20) 式は、λ^2 が Kepler 問題の Hamiltonian の値であったということから

$$
\begin{aligned}
&P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3P+\lambda^2Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger\\
&=P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3P-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2-\frac{k}{r}\right)(Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger)\\
&=P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3P-\frac{1}{4r^2}P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger+\frac{k}{2r}Q\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger\\
&=P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3P-\frac{1}{2r}P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger P^\dagger Q^\dagger+kQ\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}
\end{aligned}
$$

のように変形できることが分かる。

一方、3 次元空間での角運動量 l はこの記法では

$$
l=\langle\boldsymbol{x}\dot{\boldsymbol{x}}\rangle_2=\langle QP\rangle_2=\frac{1}{2}\left(QP-P^\dagger Q^\dagger\right)
$$

と表すことができる[2]。また、

$$
\dot{\boldsymbol{x}}=\dot{Q}\boldsymbol{\sigma}_3Q^\dagger=2P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}
$$

であることを利用すると RL vector

$$
A=A_1\boldsymbol{\sigma}_1+A_2\boldsymbol{\sigma}_2+A_3\boldsymbol{\sigma}_3
$$

は

$$
\begin{aligned}
A&=l\dot{\boldsymbol{x}}-k\frac{\boldsymbol{x}}{r}\\
&=2lP^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}-kQ\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}\\
&=2\langle QP\rangle_2P^\dagger\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}-kQ\boldsymbol{\sigma}_3Q^{-1}
\end{aligned}
$$

[2] 3 次元の角運動量 l は、4 次元の角運動量 L^L と全く同じ式で表されており、そのままで SO(3) algebra を満たしていることに注意。

$$\begin{aligned}
&= (QP - P^\dagger Q^\dagger)P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1} - kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1} \\
&= \frac{1}{2r}QPP^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger - \frac{1}{2r}P^\dagger Q^\dagger P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger - kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1} \\
&= \frac{1}{2r}QPQ\boldsymbol{\sigma}_3 P - \frac{1}{2r}P^\dagger Q^\dagger Q\boldsymbol{\sigma}_3 P - kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1} \\
&= -P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P + \frac{1}{2r}QPQ\boldsymbol{\sigma}_3 P - kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1}
\end{aligned}$$

と表されることが分かる。この式の両辺の符号を反転すれば

$$\begin{aligned}
-A &= P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P - \frac{1}{2r}QPQ\boldsymbol{\sigma}_3 P + kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1} \\
&= \left(P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P - \frac{1}{2r}P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger P^\dagger Q^\dagger + kQ\boldsymbol{\sigma}_3 Q^{-1}\right)^\dagger
\end{aligned}$$

となり、もともと

$$\left(P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P + \lambda^2 Q\boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger\right)^\dagger = P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P + \lambda^2 Q\boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger$$

であるから

$$-\left(P^\dagger \boldsymbol{\sigma}_3 P + \lambda^2 Q\boldsymbol{\sigma}_3 Q^\dagger\right) = A$$

であることが分かる。つまり、もともと４次元空間では dynamics には依存しない phase space 上の回転を引き起こす生成子である moment map は KS 変換をすると３次元空間の Kepler 問題の保存量である RL vector になるということが分かる。

7. まとめ

Kepler 問題の力学における RL vector と moment map の関係について調べた。その結果、RL vector は 4 次元空間の phase space に作用する SO(4) 回転に関わる moment map を KS 変換で３次元に落とした際の軸性 SO(3) 部分の表現であることを、geometric algebra の方法により示すことができた。その結果、moment map という概念とは関係が無いようにみえていた RL vector が、なぜ３次元空間の Kepler 問題の力学系で保存量として存在するのかという理由が明らかとなった。４次元空間における moment map は調和振動子の保存量として存在している。KS 変換は４次元の調和振動子系を３次元の Kepler 問題の力学系に移し替えると同時に、４次元の調和振動子の保存量として存在していた SO(4) moment map も RL vector に移し替えていたのである。

moment map は保存量という側面を持ち、phase space の幾何学的な対称性に関わる保存量であった。それに対し、RL vector は phase space の対称性とは関係が無い、特別な力学系に依存する力学的対称性に基づく保存量であると考えられてきた [13]。しかし、実は RL vector も、もとをただせば幾何学的な対称性に基づく保存量であることが分かったのである。

またそれに加えて、RL vector が SO(4) 回転の生成子となるのは、質点が閉じた運動をしている場合に限られるという理由についても明らかにすることができた。３次元の Kepler 問題の力学系で質点が閉じた運動をするのは$h<0$のときである。$h<0$ となるのは、$2\lambda^2=-h$ という関係から、４次元の調和振動子系においては、ポテンシャル項の係数 λ^2 が正値であることに対応している。

実際、例えば $h>0$ だったと仮定する。その場合は $\lambda^2<0$、即ち４次元の調和振動子のポテンシャル項の符号が負の値になることに対応する。すると、系に働く力は引力ではなく斥力になり閉じた運動をすることはなくなる。つまり、もはや調和振動子ではなくなってしまう。

一方、その事実に対応して KS 変換により３次元に落とした空間では、Kepler 問題の Hamiltonian におけるポテンシャル項の係数の符号は λ^2 とは無関係なので、λ^2 の符号が変わってもそれに連動して Kepler のポテンシャル項の符号が変わることはなく、質点に働く力は引力のままである。しかし、その代わりに Hamiltonian の値の符号が変わり、質点の運動は閉じていない円錐曲線、つまり放

物線軌道もしくは双曲線軌道を描く運動だけが許されることになる。

その際、λ^2 の符号が変わると、4次元の phase space 内で定義されたSO(4) の生成子のうち K_i 同士の Poisson bracket (11) 式の左辺は負となり、(9),(10),(11) 式はSO(4) の algebra を満たさなくなる。つまり、moment map の条件を満たさなくなる。それと同時に、3次元の場合の角運動量と RL vector が満たしていた (2),(3),(4) 式についても SO(4) の algebra を満たさなくなるわけである。これが3次元空間の Kepler 問題の力学系では、閉じた運動をする場合に限って角運動量と RL vector が SO(4) の algebra を満たす理由である。

Appendix

K_i と L_i が SO(4) 回転の生成子であることを示す。まず、K_i と L_i の Poisson bracket を示すと

$$\{K_1,q_0\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},q_0\}=\frac{1}{2}p_2,$$
$$\{K_1,q_1\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},q_1\}=-\frac{1}{2}p_3,$$
$$\{K_1,q_2\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},q_2\}=\frac{1}{2}p_0,$$
$$\{K_1,q_3\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},q_3\}=-\frac{1}{2}p_1,$$

$$\{K_1,p_0\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},p_0\}=-\frac{1}{2}q_2,$$
$$\{K_1,p_1\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},p_1\}=\frac{1}{2}q_3,$$
$$\{K_1,p_2\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},p_2\}=-\frac{1}{2}q_0,$$
$$\{K_1,p_3\}=\frac{1}{2}\{J_{13}-J_{02},p_3\}=\frac{1}{2}q_1,$$

$$\{K_2,q_0\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},q_0\}=-\frac{1}{2}p_1,$$
$$\{K_2,q_1\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},q_1\}=-\frac{1}{2}p_0,$$
$$\{K_2,q_2\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},q_2\}=-\frac{1}{2}p_3,$$
$$\{K_2,q_3\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},q_3\}=-\frac{1}{2}p_2,$$

$$\{K_2,p_0\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},p_0\}=\frac{1}{2}q_1,$$
$$\{K_2,p_1\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},p_1\}=\frac{1}{2}q_0,$$
$$\{K_2,p_2\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},p_2\}=\frac{1}{2}q_3,$$
$$\{K_2,p_3\}=\frac{1}{2}\{J_{01}+J_{23},p_3\}=\frac{1}{2}q_2,$$

$$\{K_3,q_0\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},q_0\}=-\frac{1}{2}p_0,$$
$$\{K_3,q_1\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},q_1\}=\frac{1}{2}p_1,$$
$$\{K_3,q_2\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},q_2\}=\frac{1}{2}p_2,$$
$$\{K_3,q_3\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},q_3\}=-\frac{1}{2}p_3,$$

$$\{K_3,p_0\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},p_0\}=\frac{1}{2}q_0,$$
$$\{K_3,p_1\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},p_1\}=-\frac{1}{2}q_1,$$
$$\{K_3,p_2\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},p_2\}=-\frac{1}{2}q_2,$$
$$\{K_3,p_3\}=\frac{1}{2}\{J_{00}+J_{33}-J_{11}-J_{22},p_3\}=\frac{1}{2}q_3,$$

$$\{L_1,q_0\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,q_0\}=-\frac{1}{2}q_1,$$
$$\{L_1,q_1\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,q_1\}=\frac{1}{2}q_0,$$
$$\{L_1,q_2\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,q_2\}=\frac{1}{2}q_3,$$
$$\{L_1,q_3\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,q_3\}=-\frac{1}{2}q_2,$$

$$\{L_1,p_0\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,p_0\}=-\frac{1}{2}p_1,\quad \{L_3,q_0\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,q_0\}=-\frac{1}{2}q_3,$$
$$\{L_1,p_1\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,p_1\}=\frac{1}{2}p_0,\quad \{L_3,q_1\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,q_1\}=\frac{1}{2}q_2,$$
$$\{L_1,p_2\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,p_2\}=\frac{1}{2}p_3,\quad \{L_3,q_2\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,q_2\}=-\frac{1}{2}q_1,$$
$$\{L_1,p_3\}=\frac{1}{2}\{q_1p_0-q_0p_1+q_2p_3-q_3p_2,p_3\}=-\frac{1}{2}p_2,\quad \{L_3,q_3\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,q_3\}=\frac{1}{2}q_0,$$

$$\{L_2,q_0\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,q_0\}=-\frac{1}{2}q_2,\quad \{L_3,p_0\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,p_0\}=-\frac{1}{2}p_3,$$
$$\{L_2,q_1\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,q_1\}=-\frac{1}{2}q_3,\quad \{L_3,p_1\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,p_1\}=\frac{1}{2}p_2,$$
$$\{L_2,q_2\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,q_2\}=\frac{1}{2}q_0,\quad \{L_3,p_2\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,p_2\}=-\frac{1}{2}p_1,$$
$$\{L_2,q_3\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,q_3\}=\frac{1}{2}q_1,\quad \{L_3,p_3\}=\frac{1}{2}\{q_3p_0-q_0p_2+q_1p_2-q_2p_1,p_3\}=\frac{1}{2}p_0.$$

$$\{L_2,p_0\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,p_0\}=-\frac{1}{2}p_2,$$
$$\{L_2,p_1\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,p_1\}=-\frac{1}{2}p_3,$$
$$\{L_2,p_2\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,p_2\}=\frac{1}{2}p_0,$$
$$\{L_2,p_3\}=\frac{1}{2}\{q_2p_0-q_0p_2+q_3p_1-q_1p_3,p_3\}=\frac{1}{2}p_1,$$

となる。これらは phase space 内での無限小回転を引き起こしていることがわかるが、それらは行列 Σ_i, Λ_i で表現することもできる。

$$\Sigma_1\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_2 \\ -p_3 \\ p_0 \\ -p_1 \\ -q_2 \\ q_3 \\ -q_0 \\ q_1 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_2\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \\ p_3 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_0 \\ q_3 \\ q_2 \end{pmatrix},$$

$$
\Sigma_3 \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \\ q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},
$$

$$
\Lambda_1 \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_1 \\ q_0 \\ q_3 \\ -q_2 \\ -p_1 \\ p_0 \\ p_3 \\ -p_2 \end{pmatrix},
$$

$$
\Lambda_2 \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_2 \\ -q_3 \\ q_0 \\ q_1 \\ -p_2 \\ -p_3 \\ p_0 \\ p_1 \end{pmatrix},
$$

$$
\Lambda_3 \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -q_3 \\ q_2 \\ -q_1 \\ q_0 \\ -p_3 \\ p_2 \\ -p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}.
$$

参考文献

[1] P.Woit, *QuantumTheory,Groups and Representations,* Springer,（2017）

[2] C. Runge, ***Vektoranalysis,*** Verlag Von S. Hirzel, Leipzig,（1919）; W. Lenz, "Über den Bewegunsverlauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung," Z. Phys. 24, 197-207（1924）; H. Goldstein, "Prehistory of the "Runge-Lenz" vector", Am. J. Phys. 43（1975）737, " More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector", 44（1976）1123

[3] 池森均 , 北門新作 , 佐藤俊郎 , 松井吉光 , "Moment map のすすめ（Ｉ）", 愛知大学一般教育論集 Vol.59, 1-28（2021）; "Moment map のすすめ（II）", 愛知大学一般教育論集 Vol.60, 1-22（2022）

[4] H. Ikemori, S. Kitakado, Y. Matsui, T. Sato, "Runge-Lenz Vector as a 3d Projection of SO（4）Moment Map in $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ Phase Space",（2022）, arXiv : 2212. 04931 [physics. class-ph]

[5] T. Levi-Civita, "Sur la regularisation du probleme des trois corps", Acta Math., 42, 99-144（1920）

[6] 山本義隆 , 中村孔一 ,「解析力学 II」, 朝倉書店（1998）

[7] P. Kustaanheimo and E. Stiefel, "Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization", J. Reine Angew. Math. 218, 204-219（1965）

[8] J.Marsden and A. Weinstein, "Reduction of Symplectic Manifolds with Symmetry", Reports on Mathematical Physics Vol.5, 121-130（1974）

[9] T. Bartsch, "The Kustaanheimo-Stiefel transformation in geometric algebra", J. Phys. A 36, 6963（2003）

[10] P. Saha, "Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics", Mon.Not. Roy.Astron.Soc. 400, 228（2009）

[11] Toshihiro Iwai and Yoshio Uwano, "The four-dimensional conformal Kepler problem reduces to the three dimensional Kepler problem with a centrifugal potential and Dirac's monopole field. Classical theory", J. Math. Phys. 27, 1523-1529（1986）

[12] 片山登揚 , " 超可積分系についての考察 ", 数理解析研究所講究録 , 1070 巻 , 52-68, 京都大学数理解析研究所（1998）; E . A . Lacomba and J. Libre., "Integrals. invariant manifold., and degeneracy for central force problems in R^n", J. Math. Phys, 33, 2138-2147（1992）.

[13] H. Goldstein, ***Classical Mechanics***, Addison-Wesley,（1950）; L. Schiff, ***Quantum mechanics*** (3rd ed.), McGraw-Hill,（1968）; W. Greiner and B. Müller, ***Quantum Mechanics: Symmetries***（2nd Revised ed.）, Springer.（1994）