

関数 fitting による発育曲線記述における成長学的意味について

—logistic 関数を引用して—

藤井勝紀*

Auxologic Meaning in Describing of Growth Curve by The Fitting Function

—by quoting the logistic function—

Katsunori Fujii

Abstract

The fitting the mathematical function to the human growth curve was tried by Quetelet the first time in the historical background. After that, as the mathematical function fitted to the human growth curve, logistic function derived from theory of increasing of population by Malthus was applied to the human height growth. Auxologic meaning in the mathematical function fitted to the human growth curve is to examine the parameters derived from the function (like logistic function). In this study, it makes clear the point of contact between Auxology and mathematical function, and approaches to deriving universal rule of the growth phenomenon by applying the general logistic function as the mathematical function. Longitudinal height growth data of 300males were obtained, and the data were classified into low, middle and high height group with judging from the final height. Two data were respectively sampled at random from low, middle and high height group, and the general logistic function was fitted to the six longitudinal height growth data. The parameters derived from the general logistic function which fitted here to the height growth processes were examined, and significance of the function's parameters was sought in deriving universal rule in the growth phenomenon.

Key words : mathematical function, logistic function, interpolation fitting

I 研究の目的

人の発育プロセスに数学関数を当てはめる試みは歴史的には Quetelet の研究にその痕跡が残されている。しかし、本格的な取り組みは、Jenss and Bayley¹²⁾、Count²⁾ による研究が初期の研究と考えられている。彼らはすでに微分方程式から指数関数を導き出して発育期の前半に適用した。その後、Marubini 等^{15) 16)}が logistic 関数を適用するようになる。この関数は周知のように、シグモイドと呼ばれる S 字状の曲線を描く。つまり、Scammon²⁵⁾ は発育曲線を 4 つのパターンに分類し、その分類された 1

つの一般型が示す発育のパターンがシグモイド曲線を描くのである。このような根拠から発育曲線の記述に logistic 関数が幅広く適用されてきたと考えられる。もちろん、最近ではより良い fitting 関数が提唱され、logistic 関数の欠点が明確にされてきたが、しかし、この関数が従来までに発育研究に多大な貢献を示してきた経緯は否定できない。そこで、今回は主に logistic 関数を引用してその成長学的意味を検討しようとするものである。

* 愛知工業大学、愛知大学非常勤講師

II logistic 関数と成長学の接点

Quetelet は発育研究において統計的方法適用の確立をもたらしたが、彼のさらなる大きな貢献は、発育曲線に数学関数の fitting を試みていることである。しかし、身長発育における思春期急増期の存在を否定した立場を取ったため、その後、あまり評価はされなかった。

数学関数を人の発育曲線に fitting させる本格的な取り組みは、Jenss and Bayley¹²⁾、Count²⁾ がそれぞれ基本的には出生から 7、8 歳までに対して数学関数を適用して解析している。ここで問題とされるのは、なぜ人の発育曲線に対し数学関数を適用するのかという事である。ここに至る過程については、正に生物学と数学を結ぶ接点の議論が浮上してくるわけである。

この議論の基礎的な核を成したのが、人口増加理論について幾何数列的に増加を示すと仮定した Malthus の法則である。彼の法則を数学的に説明すれば次のような微分方程式が導かれる。

$N = N(t)$ (N = ある国の t 時点における総人口) とする時、人口増加量は人口に比例すると仮定したのが Malthus の法則である。この関連を方程式にすれば (1-1) 式が成り立つ。

$$(1-1) \quad \frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$(1-2) \quad \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = \gamma \quad \text{として、} t \text{ で両辺を積分}$$

すると (1-4) 式となる。
すなわち、

$$(1-3) \quad \int \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} dt = \int \gamma dt$$

A を積分定数として、(1-4) 式が導かれる。

$$(1-4) \quad \log N = \gamma t + A$$

そこで、 $t = 0$ で $N = N_0$ ならば、 $\log N_0 = A$ であるから (1-5) 式が導かれる。

$$(1-5) \quad N = N_0 e^{\gamma t}$$

以上の過程から理解されるように、指数的增长を示すことになる。この数学的アイデアを一般的にマルサスの法則と呼んでいるわけであ

る。この法則のアイデアが人口増加の基礎理論として確立され、さらに、人口の増加率が人口の関数になるという理論が生まれてきた。logistic 関数はまさにこの理論から導き出されたものである。

Verhurst は、人口の増加を妨げる抵抗といわれる概念を導入した。この抵抗は人口の関数 (2-1) を想定し、

$$(2-1) \quad \frac{dN}{dt} = \gamma N - f(N)$$

人口増加量を上式の微分方程式で導いた。そこで、 $f(N) = kN^2$ 、つまり、人口増加を妨げる抵抗は人口の自乗に比例すると仮定すると、

$$(2-2) \quad \frac{dN}{dt} = \gamma N - kN^2 = (\gamma - kN)N \quad \text{となり、}$$

人口の増加率は人口の大きさに比例して減少するとする方程式が導かれる。

この微分方程式を解くと、

$$(2-3) \quad N(t) = \frac{a}{b + e^{-mt}}$$

(2-3) 式のような最も簡単な logistic function が導かれる。

そして、この式を適用して、Pearl and Reed²¹⁾ がアメリカ合衆国の人口増加に適用した。しかしながら、人口論として方程式としては僅か 20 年しかその予見性は保たれなかった。つまり、方程式の終末部が実際のデータ値とはかなり食い違ってくるのである。彼らは人口増加への適用の他にも、ラットの成長過程に対して logistic 方程式を適用している。

Pearl and Reed²²⁾ はラットの成長過程に以下のような関数を適用した。

$$(3-1) \quad \gamma = \frac{k}{1 + m e^{\frac{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n}}}$$

このように、人口予見の方程式としてはその価値を減じていったが、生物の増殖モデルとしては、これ以後多くの研究者によって適用され、確かめられている。そして、このような生物学と数学を結ぶ歴史背景から人の成長曲線に logistic 関数を当てはめる理論的根拠が構築されたと考えられる。ここで、生物学と数学を結

ぶ接点の仮定を明確にしておく必要がある。それは、『数学と生物学を結ぶ仮定として、人口または個体数は本来不連続な整数値であるが、それが連続な値をとるものと考え、これを数学的記述のための慣習といい、同時に時間も連続的に流れるので時間 t の関数として連続的なものと考えことにする』このような説明になり、つまり、記述すべき現象が数学的に連続であると仮定することにあるわけである。したがって、このような仮定の基に生物(特に微生物)の増殖過程の記述、さらには人の成長過程(特に身長)の記述に適用されていくのである。

Jenss and Bayley¹²⁾、Count²⁾の適用した数学的関数は、以下の通りである。

Count's model: $y = a + bt + c \log(t)$

Jenss-Bayley's model: $y = a + bt - e^{-at}$

以上の関数から判断されることは、Count²⁾のモデルは線形モデルであり、Jenss and Bayley¹²⁾のモデルは指数モデルである。これらのモデルは出生から7、8歳の身長に適用しているため、logisticモデルのアイデアはまだ構築されていない。一方、福田、尾崎⁹⁾も、6~10才における人の身体的成長曲線に数学関数モデルの適用を試みている。この研究で適用された数学的関数は、身長に対しては線形モデルであり、体重に対しては3次、4次多項式モデルを適用したものであるが、客観的な理論的検証が希薄で、これについての検討はあまり知られてはいない。logisticモデルが人の成長曲線に適用されたのは、世界的には、Marubini等^{15) 16)}の研究が良く知られている。しかし、実は、福田、尾崎⁹⁾の継続研究として、尾崎¹⁹⁾が思春期における人の成長曲線にlogisticモデルを構築している。彼は独自に以下の微分方程式からlogistic関数を導いている。

(4-1) $\frac{dy}{dt} = (k - my)y$: 発育係数は現在の発育状態に比例して減少する。

これを解くと

$$(4-2) \quad y = \frac{l}{1 + ce^{-kt}}$$

上式は、Robertson²⁴⁾の autocatalytic 式と同じであるが、 y を身長としているところが大きく異なる点である。このように尾崎¹⁹⁾は世界に先んじて人の身長に対してlogisticモデルを適用した。ところで、実際にlogisticモデルを適用する場合、Hauspie¹¹⁾によれば、以下の式が一般的なlogistic関数となる。

$$(5-1) \quad y = k(1 + ce^{-mt})^{\frac{1}{1-m}}$$

上式における成長学的意味を示すと、 $m > 1$ の場合、下限が0、上限がKで漸近するSigmoidと呼ばれるS字状曲線となる。ちなみに、 y は成長の現量値、 t は時間(この場合は年齢を示す)、 c は積分定数、 b はS字状曲線の広がり率を示す定数である。そして、 $m = 2$ の場合、一般的に発育研究に適用されているlogistic関数となるわけである。

$$(5-2) \quad y = k(1 + ce^{-mt})^{-1} \\ = \frac{k}{1 + ce^{-mt}}$$

次に、特に、 $m = 1$ ($m \rightarrow 1$)の場合、Gompertz¹⁰⁾によって導き出されたGompertz関数となる。

$$(5-3) \quad y = k(1 + ce^{-mt})^{\frac{1}{1-m}} \\ = k(1 + ce^{-mt})^{\infty}$$

実は、このGompertz関数はlogistic関数よりも先に導き出されており、すでにGompertz¹⁰⁾により構築されている。人の成長曲線への適用もMarubini等^{15) 16)}に先んじて、Deming³⁾が男子24名、女子24名の身長にGompertz関数を適用している。Marubini等^{15) 16)}はlogistic関数とGompertz関数の成長曲線に対するfittingの精度の比較を検討しているが、この時点では明確な差は導かれなかった。つまり、両関数とも初期値(下限の値)と上限の値によってfittingの精度が変わる性質を備えているため、個々のデータの違いにより両者の関数の精度が左右されるためと考えられる。結局、この両関数は与えられたデータ点(観測されたデータ点)を通過するように構成されているわけで

はないため、fitting としての精度はあまり良くないと結論されている。

この状況で logistic と Gompertz 関数を人の成長曲線に fitting させることは精度上限界があるため、Thissen 等²⁷⁾ は double logistic 関数を提案した。この関数は思春期の成長プロセスの fitting の精度を高めるために構築されたものであり、さらに、低年齢層や思春期以後のプロセスに fitting の精度を高めるために Bock and Thissen¹⁾ は triple logistic 関数を提案した。そして、成長プロセスの全般にわたって fitting の精度を高めるために、Preece and Baines²³⁾ の開発した複合 logistic 関数が提唱された。

このように、Malthus の人口増加理論から派生した微分方程式モデルが logistic モデルとして構築され、生物の増殖過程の記述を経て、成長曲線モデルの記述に適用された歴史的経緯が存在するわけである。

III 方法

1、資料

東海地区の某男子大学300名の6歳から18歳(小学1年から大学1年)までの健康診断票から身長縦断的発育データが得られた。そのデータから身長を基準に高低別に分類し、低、中、高身長に分類されたデータの中から2名づつを無作為に抽出し、そして、各身長グループから2名の身長の縦断的発育データを適用した。

2、解析手法

1) 解析の手続き

男子300名の身長の縦断的発育データから18歳時点での身長の平均と標準偏差を求める。その統計値から平均値評価法により5段階の尺度を構成する。その結果、162.5cm未満を低身長グループ、168.4~174.3cmまでを中身長グループ、180.1cmを越える者を高身長グループとした。そして、それぞれのグループから2名づつ計6名のデータを無作為に抽出し、抽出した縦断的発育データにおける身長の6歳から18歳までの発育現量値に対して logistic 関数を

適用した。

2) logistic 関数の導出

研究の目的でも述べたように、Scammon²⁵⁾ は身体の諸属性を大きく4つのパターン(神経型、リンパ型、生殖型、一般型)に分類してその発育曲線を提唱している。この一般型の発育曲線モデルパターンは、乳幼児期に急激に発育し、その後定常状態をとり、再び思春期に急増するS字状の曲線を示している。このような一般型がS字状の曲線を描くという論理的背景から logistic 関数が適用されるようになった。一般的な logistic 関数は以下の式で表される。

$$(2-1) \quad F(t) = \frac{k}{1 + e^{a(t-b)}} + l$$

a : S字曲線の拡がり b : 変局点

k : 終末身長と下限設定値の差 l : 下限設定値

t : 年齢

実際のデータに当てはめ、定数 a , b , k , l を決定するには $F(t)=y$ として、式 (2-1) の両辺の対数を取って式 (2-2) のように変形する。

$$(2-2) \quad \log \frac{(l+k)-y}{y-l} = a(t-b)$$

ここで左辺は y が変数であり k , l は個人にとっては、又は集団にとっては定数であることから左辺を S と置く。右辺は $at-ab$ となることから、以下の式が導かれる。

$$(2-3) \quad S = at - ab$$

(2-3) 式に示されるように、 a と b を S_i , t_i のデータを与えて最小二乗法により決定することが出来る。

次に logistic 関数の一次導関数であるが、logistic 関数の一般式を微分するために (2-1) 式の $-ab$ を b として、変形すると式は次の (2-4) のように表される。

$$(2-4) \quad y = \frac{k}{1 + e^{at+b}} + 1$$

さらに、この式を変形すると次の式 (2-5) のようになり、

$$(2-5) \quad y = l(1 + e^{at+b})^{-1} + k$$

式 (2-5) を微分することによって求められ

る式は次の (2-6) のようになる。

$$(2-6) \quad y = aI \frac{e^{at+b}}{(1+e^{at+b})^2}$$

式 (2-6) に一般式で求めた係数値を代入し、logistic 関数の一次導関数を算出する。以上が logistic 関数の導出方法である。

IV 結果

1、Example

example 1：低身長に対する logistic 関数の当てはめ

表の DATA：S1 は実際に測定された 6 歳から 18 歳（小学 1 年から大学 1 年）までの生の観測データである。まず、このデータを logistic 関数の公式に当てはめると、以下に示す (S1-1) は logistic 関数の一般式、(S1-2) は logistic 関数の一次導関数の式である。

$$(S1-1) \quad F(t) = \frac{50.7}{1+e^{-0.536(t-10.585)}} + 109$$

$$(S1-2) \quad f(t) = 0.536 \times 50.7 \frac{e^{-0.536(t-10.585)}}{(1+e^{-0.536(t-10.585)})^2}$$

example 2：中身長に対する logistic 関数の当てはめ

表の DATA：M1 は実際に測定された 6 歳から 18 歳（小学 1 年から大学 1 年）までの生の観測データである。まず、このデータを logistic 関数の公式に当てはめると、以下に示す (M1-1) は logistic 関数の一般式、(M1-2) は logistic 関数の一次導関数の式である。

$$(M1-1) \quad F(t) = \frac{61}{1+e^{-0.555(t-10.766)}} + 113.9$$

$$(M1-2) \quad f(t) = 0.555 \times 61 \frac{e^{-0.555(t-10.766)}}{(1+e^{-0.555(t-10.766)})^2}$$

example 3：高身長に対する logistic 関数の当てはめ

表の DATA：H1 は実際に測定された 6 歳から 18 歳（小学 1 年から大学 1 年）までの生の観測データである。まず、このデータを logistic 関数の公式に当てはめると、以下に示す (H1-1) は logistic 関数の一般式、(H1-2) は logistic 関数の一次導関数の式である。

$$(H1-1) \quad F(t) = \frac{69.6}{1+e^{-0.441(t-11.479)}} + 115.9$$

$$(H1-2) \quad f(t) = 0.441 \times 69.6 \frac{e^{-0.441(t-11.479)}}{(1+e^{-0.441(t-11.479)})^2}$$

2、Example の結果の整理

Example1, 2, 3 は低、中、高身長の発育プロセスに logistic 関数を当てはめた場合の一例として示したものである。このように、身長については Example1, 2, 3 を含めて低身長 2 例 (S1、S2)、中身長 2 例 (M2、M2)、高身長 2 例 (H1、H2) に対して logistic 関数を当てはめ、関数に含まれるパラメーターを求め、それを Table 1 にまとめた。そして、Fig 1～Fig 3 は Example1, 2, 3 で導かれた logistic 関数の一般式と一次導関数（一次微分）のグラフである。

まず a、b、k、l のパラメーターの中でも、ここでの成長曲線への当てはめの議論として

DATA：S1

age	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
height	112.8	116.6	121.0	124.6	128.6	133.3	140.7	148.5	153.2	155.9	157.5	158.0	159.0

DATA：M1

age	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
height	116.3	122.0	127.5	132.6	137.5	143.1	151.5	162.3	168.2	170.8	172.3	173.0	173.1

は、特に a、b のパラメーターが議論の対象となる。それは、k、l は適当に決定されたパラメーターであるために議論する意味はあまり存在しない。そこで、a、b のパラメーターであるが、この種の研究における歴史的な経緯を観てみると、b パラメーターが特に議論の争点となっている。つまり関数分母の指数部が 0 になるような b 値は logistic 曲線の変曲点を示すもので、言い換えれば成長曲線の速度のピーク時の年齢を意味するものである。この意味は思春期のピーク年齢と理解されているわけである。a パラメーターの議論はあまりなされていない。それは、関数の広がり（傾き）を議論しても、成長曲線にあまり反映されないと考えられるからである。

さて、Example 1, 2, 3 の結果を見てみると、パラメーター：b は高身長 の 2 例において 11.48, 11.74 歳と低、中身長より遅くなっている。また、パラメーター：a は高身長 の 2 例で -0.441, -0.456 と低、中身長より数値的に減少している。次に、パラメーター：b における微分値、つまり速度のピーク値を見ると、身長別にそれほど変化はない。今、この速度のピーク値を、生の観測された発育現量値の 1 年間の差分の最大値 (PHV) と比較すると、約 1 cm/yr から 2 cm/yr ほどの隔たりが示された。さらにこの PHV 年齢とパラメーター：b を比較すると、1 ~ 2 歳の差が示された。そして、関数の fitting における精度の基準とも云える残差平方和は Table 3 に示されているが、精度の議

DATA : H 1

age	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
height	119.9	125.1	131.4	135.6	141.0	146.6	151.3	159.4	168.0	174.3	178.6	180.6	180.6

Table 1 Parameters when fitted logistic function to low, middle, high height growth process

		a	b	k	l	distances at parameter b	velocities at parameter b
low height	S 1	-0.536	10.585	50.7	109.0	134.35	6.79
	S 2	-0.678	9.986	51.6	107.8	133.60	8.75
middle height	M 1	-0.555	10.766	61.0	113.9	144.40	8.46
	M 2	-0.599	10.599	59.5	115.5	145.25	8.91
high height	H 1	-0.441	11.479	69.6	115.9	150.70	7.67
	H 2	-0.456	11.739	71.0	115.0	150.50	8.09

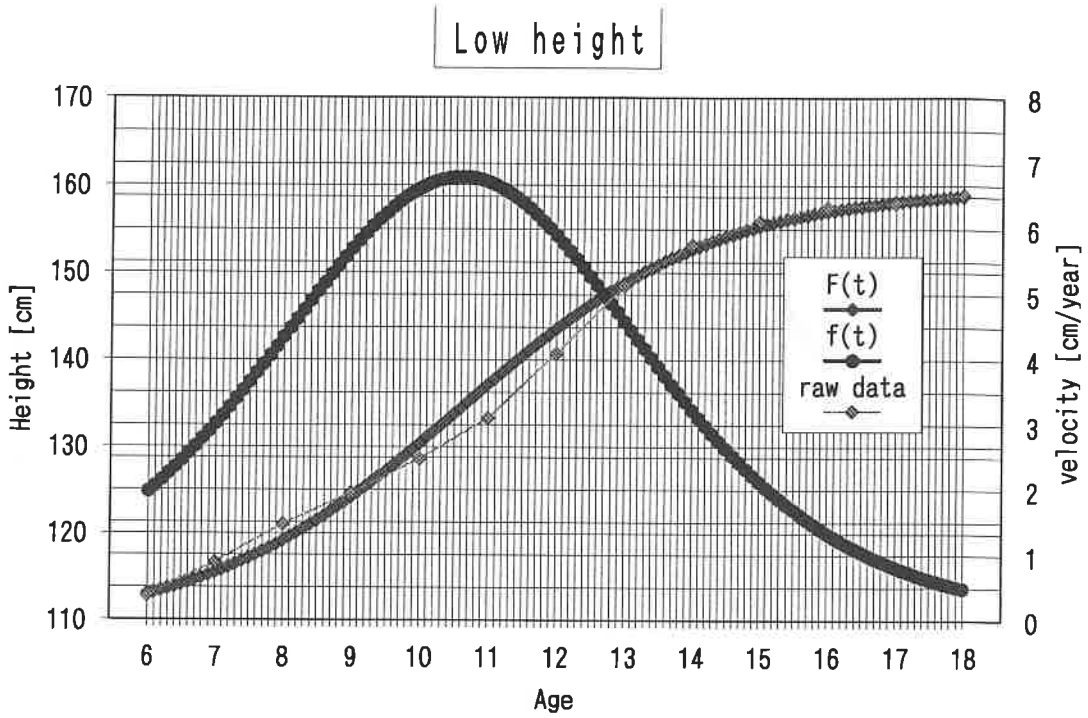


Fig1 A graph of example 1 : which fitted general logistic function to the growth process in low height

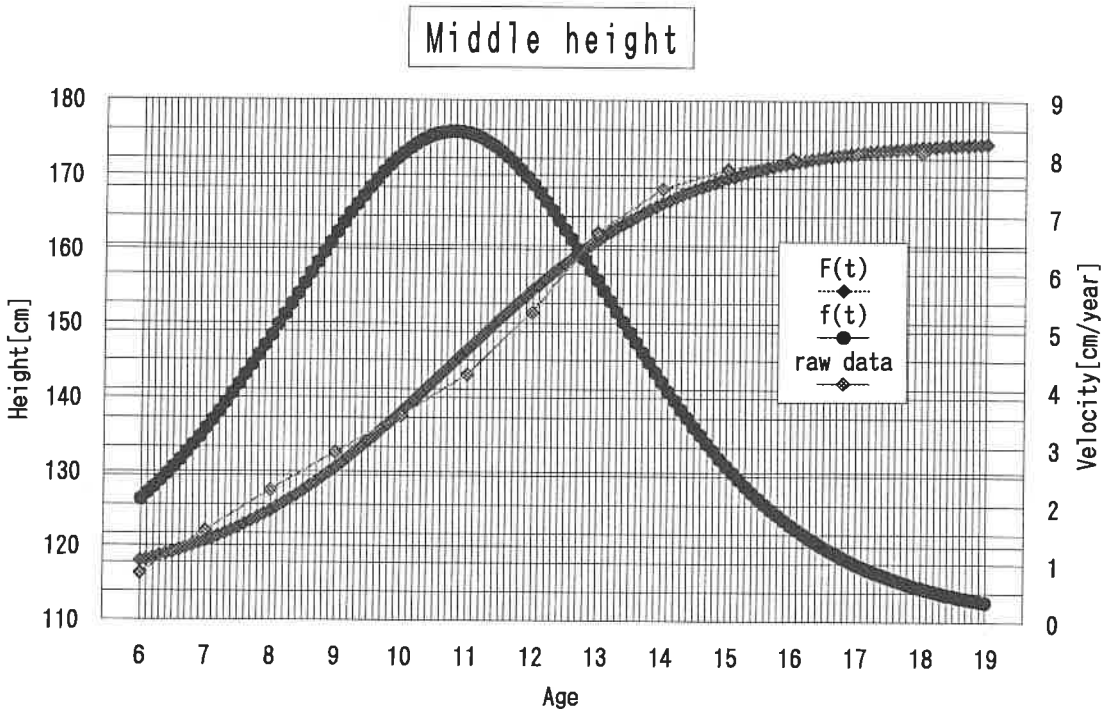


Fig2 A graph of example 2 : which fitted general logistic function to the growth process in middle height

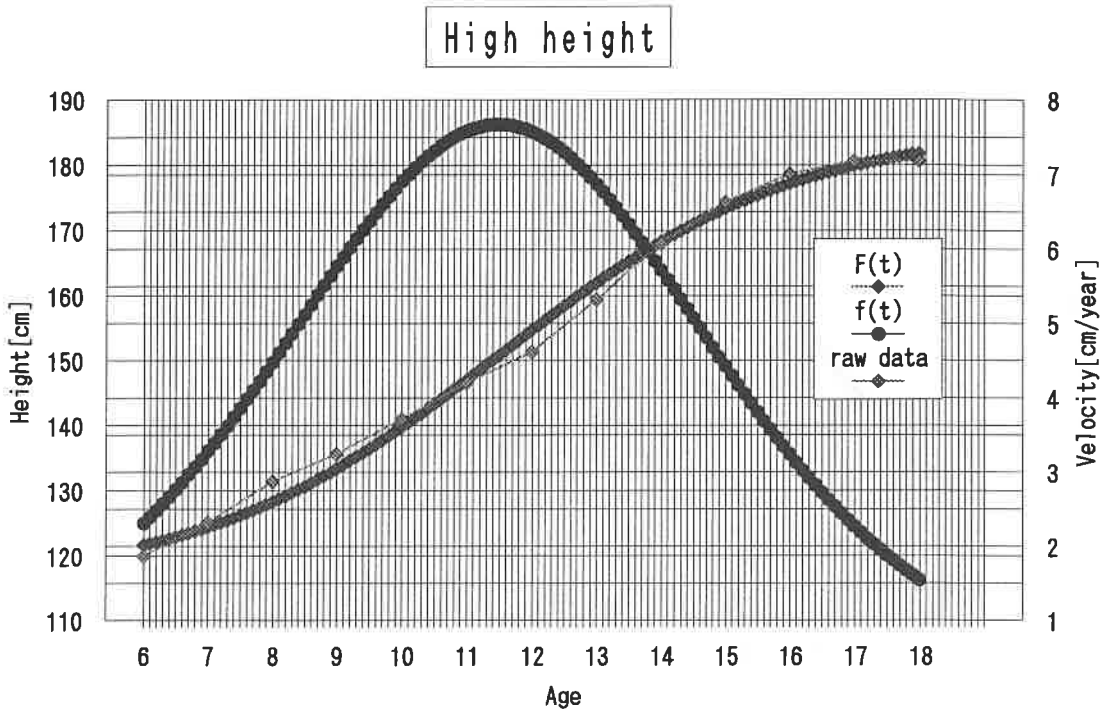


Fig3 A graph of example 3 : which fitted general logistic function to the growth process in high height

Table2 Comparison between biological parameters derived from the raw data and logistics function

DATA:	S 1	S 2	M 1	M 2	H 1	H 2	mean
logistic (b)	10.59	9.99	10.77	10.56	11.48	11.74	10.86
logistic (V at b)	6.79	8.75	8.46	8.91	7.67	8.09	8.11
PHV age	12.5	11.5	12.5	12.5	13.5	13.5	12.67
PHV	7.80	9.90	10.80	9.60	8.60	10.30	9.50

(b) : parameter b (V at b) : Velocities at parameter b

Table3 Residual sum of square

DATA	S 1	S 2	M 1	M 2	H 1	H 2	mean
logistic	60.3	39.72	28.92	29.52	20.52	40.44	36.6

論は他の fitting 関数による当てはめの比較が設定されていないので logistic 関数だけでは検討できない。

V 論 議

1、当てはめ (fitting) と補間 (interpolation)

この両概念は数学的には明らかに異なった使い方がなされている。例えば、「対象となる関数がある関数で当てはめる {フィッティング (fitting) する。}。または、ある関数で補間する。」と表現するように、当てはめるべき元の関数が分かっている場合には両概念の意味は区別されやすい。しかし、元の関数または曲線が分からない場合、「その不明な曲線を近似的にフィッティング (fitting) する、または近似的に記述、補間する。」と表現するように、同意語的に扱われる場合がある。したがって、この両概念について成長学的意味を明確にしておく必要がある。

そこでフィッティング (fitting) の概念構成としては2通りの考え方が導かれる。1つは当てはめ本来の意味としての「fitting」の概念であり、もう1つは「補間(interpolation)」の概念である。「fitting」とは発育プロセスにおける時間的変異につれて観測されたデータ点をプロットした曲線に対して、その概観に類似した曲線を構成することであるから、ある関数の値として表しうようにある関数を決定して当てはめる (fitting する) ことである。従来からその類似曲線の構成関数として、ここで引用してい

る logistic 関数や Gompertz 関数が良く知られている。

次に、補間 (interpolation) とは観測されたデータとデータの間を滑らかに繋ぐ (補間する) ことにより、データをプロットした発育曲線を近似的に描くことである。または関数を問題にせず、与えられたデータが示す変化を曲線で記述しようとする場合に補間関数を用いて、小なる歩みで補間値を求めて近似的に曲線を得ることもある。このような数学的補間公式として多項式やスプライン関数が良く知られている。

このように、fitting と補間を成長学的意味において概念規定すると、大別すれば、Hauspie¹¹⁾の示す Structural model (概念構成モデル) と Nonstructural model (概念構成のないモデル) に分類できるのではないだろうか。つまり、Structural model には fitting の概念が、Nonstructural model には補間 (interpolation) の概念が適用できよう。

以上のように、成長学的意味において両概念を区別してみると、当てはめ (fitting) の概念においては、関数における精度の議論がそのまま関数の有効性に繁栄されるが、補間 (interpolation) の概念では関数の精度が議論できない問題がある。つまり、fitting 関数では観測データ点を通過するように構成されていないので、観測データ点との誤差を判定すれば精度は議論できるが、補間関数ではもともと観測データ点を通過するように構成されているので、その点については議論が不可能である。しかも真の発

育曲線は不明であるため判断するための基準がない。そこで、Fujii and Kawanami⁷⁾ はこのような問題点に対して、観測データにおける年間発育量を唯一真の観測値として補間関数の微分値、つまり速度曲線とその観測値との誤差を比較の議論と考えた。これによって補間関数の精度の論議を成立させた経緯がある。

このように考えると、fitting 関数と補間関数の精度を議論した場合、当然、補間関数の精度が高いことが示されるわけだが、ここで両概念における関数の成長学的意味における有効性を求めようとする場合、精度上の議論だけで判断できるのであろうか。つまり、それは必ずしも観測データ点を通過しなくとも善とする考え方があるからで、例えば、発育評価の基準を導くための標準発育曲線を記述するような目的の場合であれば、観測データ点の通過の必要性は考えなくとも良いであろう。また、発育現象を単純化されたパラメーターに投射し、その普遍性を究明しようとする場合も敢えて観測データ点を通過する必要もないであろう。しかし、複雑性を内包した成長曲線そのものを解析しようとすれば、複雑系の論理に代表されるように、複雑な状態をそのまま捉えて解析することが必要であろう。したがって、発育プロセスにおける観測データを忠実に反映する必要がある。いずれにせよ、当てはめ (fitting)、補間 (interpolation) の立場は取るわけだが、発育現象の解明において普遍的な法則性を求めようとする点においては、両立場における手法ともその成長学的意味においては優れた有意性を内包していると言える。

2、fitting 数学関数における成長学的意味

ここで引用された logistic 関数は明らかに当てはめ (fitting) の立場を取る関数系である。したがって、精度の議論が展開される必要がある。そこで、今回の男子身長発育データに fitting させた精度を検討しようとする場合、Table 3 に示された残差平方和がその判断基準になるが、問題となるのは比較する対象が設定されることである。つまり、今回の logistic 関数に対して別の関数系で fitting させ、その両関数を

fitting させた結果としての残差平方和 (または、残差不偏分散: residual variance) を比較検討する必要があるわけである。しかしながら、今回示された残差平方和だけから判断しようとしても比較の対象がないために精度の議論は出来ない。もともと、fitting の精度の議論は前項でも触れたように、真の発育曲線が不明である以上、その精度の議論は相対的な比較による方法しかなく、それによって精度の優劣を判断していたわけである。この種の研究の歴史的経緯を観ても、Marubini 等^{15) 16)} は logistic 関数と Gompertz 関数との比較を試み、その精度について検討している。

ところで、この両関数の比較における精度の優劣は判断出来なかったが、その後、この一般 logistic 関数は、当てはめの精度においてはその有効性を減じていった。その背景には、精度の議論以前に logistic 関数の有するシグモイド曲線と言う限られた曲線の本質によって、発育曲線記述における発育現象をあまり明確に反映していない欠点が指摘されたことがある。このような理由から double logistic²⁷⁾、triple logistic 関数¹⁾ はもとより、Preece and Baines²³⁾ モデル、JPPS モデル^{13) 14)}、松浦¹⁸⁾ の最小二乗近似多項式¹⁸⁾ 等がその関数の当てはめの精度の議論を経て提唱されてきた。

このように、発育曲線の記述にその意義を求めようとするれば精度の議論は不可欠と言えるが、spline 補間公式^{20) 26)} や藤井の提唱したウェーブレット補間法^{4) 5) 6) 7) 8)} 等がさらに有効であろう。しかしながら、関数 fitting の意義は発育曲線の記述だけではない。それは、発育現象の普遍的法則性を究明するための有効なアプローチと云える。したがって、今回引用した一般 logistic 関数は発育曲線記述においては、当てはまりの精度の点から実用には問題があるが、しかし、普遍性へのアプローチに対しては必ずしもその有効性は否定できない。つまり、関数 fitting においてその関数の本質的な性質はあるものの、logistic 系の関数に関しては生のデータをプロットした発育曲線に対して関数で置き換えることにより、関数の有するパ

ラメーターから生の発育曲線のグラフからでは読みとれない事象が検出されるようになる。このパラメーターは当然関数という一般的法則性を備えた曲線に投射された意味を持つことになろう。ここに成長学における現象解明に対する科学的アプローチの意義が示されるのではないだろうか。

今回のExampleにも示されたように、logistic関数のパラメーター：aの数値が身長の高低別に関係があるような傾向を示した。しかし、解析したデータ数が少ないため、ここに示された傾向を議論するほどの情報はない。昨今のコンピュータの進歩により多くのデータ解析が可能になれば、パラメーター：aの議論も別の局面からアプローチが出来るかもしれない。もともとlogistic関数に対して求められる一般的法則性はその少ないパラメーターにある。つまり、今までの科学性が内包している複雑な現象を単純化することにより、現象解明へのアプローチを探ることに普遍性の原点があるのではないだろうか。

増山¹⁷⁾は成長曲線の時間軸を細工することにより(固有年齢のアイデア)直線で表現し、思春期における変曲点を明確にした。彼はそれによりアロンパ仮説(Alonpa: Almost-one parameter)を提唱した。つまり、この仮説は複雑な現象をただ1つのパラメーターで現してしまおうという仮説である。このような考え方を踏襲すれば、当てはめの精度を高めるためにパラメーターを増やして対応してきた関数系からもう一度単純なパラメーターを有するlogistic関数の適用を見直す必要があるかもしれない。いずれにせよ、今回引用したlogistic関数も含め、関数fittingにおける成長学的意味は単純化されたパラメーターに発育現象を投射させて、その普遍性を導き出そうという点に意義が認められるのではないだろうか。

VI 参考文献

- 1) Bock, R. D. and Thissen, D. (1980) Statistical problems of fitting individual growth curves, In : Johnston, F. E., Roche, A. F., Susanne, C., eds, Human Physical Growth and Maturation. New York and London, Plenum Press, 265-290.
- 2) Count, E. W. (1943) Growth patterns of the human physique - an approach to kinetic anthropometry -, Hum Biol, 15: 1-32.
- 3) Deming, J. (1957) Application of the Gompertz curve to the observed pattern of growth in length of 48 individual boys and girls during the adolescent cycle of growth, Hum Biol, 29: 83-122.
- 4) 藤井勝紀、山本浩 (1995) 身長 of 成熟別発育速度曲線の解析、体力科学、44: 431-438.
- 5) 藤井勝紀、松浦義行 (1996) 男子体格の平均発育曲線から導き出される速度曲線の解析、体育学研究、41: 247-260.
- 6) 藤井勝紀 (1996) Wavelet Interpolation Method による男子身長 of MPV 年齢別平均発育速度曲線の解析、東海保健体育科学、18: 31-40.
- 7) Fujii, K. and Kawanami, K. (1998) An Analysis in regard to Relationship between Age at MPV of Height and Weight, and Its Sex Difference, Jpn J School Health, 40: 317-331.
- 8) Fujii, K. and Matsuura, Y. (1999) Analysis of the Growth Velocity Curve for Height by the Wavelet Interpolation Method in Children Classified by Maturity Rate, Am J Hum Biol, 11: 13-30.
- 9) 福田邦三、尾崎久雄 (1947) 6~10才に於ける身長、体重の成長方程式に就いて、民族衛生、14: 53-56.
- 10) Gompertz, B. (1825) On the nature of the function expressive of the law of human mortality, Phil, Trans, Royal Soc, 115: 513-585.
- 11) Hauspie, R. C. (1989) Mathematical models for the study of individual growth patterns, Rev Epidemiol Sante Publique, 37: 461-476.
- 12) Jenss, R. M. and Bayley, N. (1937) A mathematical method for studying the growth of a child, Hum Biol, 9: 556-563.
- 13) Jolicoeur, P., Pontier, J., Pernin, M. O. and Sempe, M. (1988) A lifetime asymptotic growth curve for human height. Biometrics, 44: 995-1003.
- 14) Jolicoeur, P., Pontier, J. and Abidi, H. (1992) Asymptotic models for the longitudinal growth of human stature, Am J Hum Biol, 4: 461-468.
- 15) Marubini, E., Resele, L.F. and Barghini, G. (1971) A comparative fitting of the Gompertz and Logistic functions to longitudinal height data during adolescence in girls, Hum Biol, 43: 237-251.

- 16) Marubini, E., Resele, L. F., Tanner, J. M. and Whitehouse, R. H. (1972) The fit of Gompertz and Logistic curves to longitudinal data during adolescence on height, sitting height and biacromial diameter in boys and girls of the Harpenden Growth study, *Hum Biol*, 44 : 511-523.
- 17) 増山元三郎 (1994) 成長の個体差 - ヒトの成長直線をめぐって -, みすず書房、東京、pp. 8-80.
- 18) Matsuura, Y. (1991) A study on physical growth and development through investigating the polynomial fitted their distance curves - in the term over 6 and 18 years old -, *Bull Health Sports Sci, University of Tsukuba*, 14 : 201-210.
- 19) 尾崎久雄 (1949) 思春期の成長方程式、*民族衛生*、16 : 52-57.
- 20) 大野優子、石島央子、村田光範 (1986) スプライン平滑化による標準身体発育曲線の作成、*統計数理*、34 : 222-231.
- 21) Pearl, R. and Reed, L. J. (1923) On the mathematical theory of population growth. *Metron*, 3 : 6-19.
- 22) Pearl, R. and Reed, L. J. (1925) Skew growth curves, *Proc Nat Acad Sci*, 11 : 16-22.
- 23) Preece, M. A. and Baines, M. J. (1978) A new family of mathematical models describing the human growth curve, *Ann Hum Biol*, 5 : 1-24.
- 24) Robertson, T. B. (1908) On the normal rate of growth of an individual, *Arch Entw Mech* XXV : 581-614.
- 25) Scammon, R. E. (1927) The first seriatim study of human growth, *Am J Phys Anth*, 10 : 329-336.
- 26) 田原佳子、多田羅裕子、村田光範、高石昌弘、船川幡夫 (1986) 思春期成長促進現象に関する数学的解析について 第一報、*思春期学*、4 : 51-58.
- 27) Thissen, D., Bock, R. D., Wainer, H. and Roche, A. F. (1976) Individual growth in stature - A comparison of four growth studies in the U. S. A, *Ann Hum Biol*, 3 : 529-542.