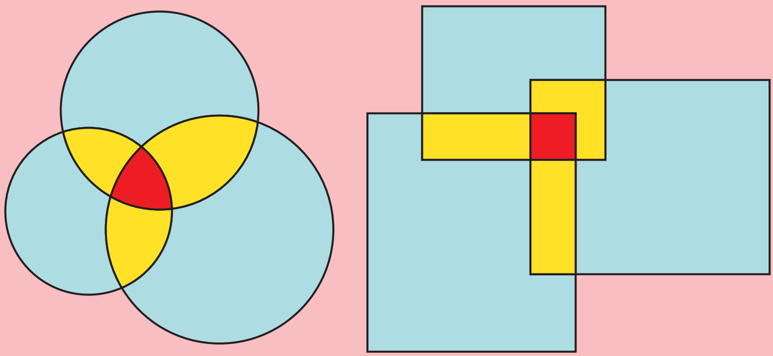
愛知大学経営総合科学研究所叢書　38

都市の形成，市場および集積の経済

神頭広好　著



愛知大学経営総合科学研究所

Urban Form, Markets and Agglomeration Economies

Hiroyoshi Kozu
Aichi University

2012
Institute of Managerial Research
Aichi University

はしがき

最近の研究において，拙著（2007）では円形の単一中心モデルおよび楕円形の2核心中心モデルのコンパクトシティを前提とした場合の有意性について検討している。また拙著（2008）においては幾何学の定理にランク・サイズモデルを応用してあらゆる都市の立地パターンについて考察を試みている。さらに拙著（2011）では幾何学の方べキの定理と相加相乗不等式を用いて集積の経済に関する分析方法を提示している。ついで，そこでは工業都市の創出が都市圏全体の立地構造を変えてしまうこと，都市のランク・サイズモデルとゼータ関数の関係から国の GNP が導かれることができることが示されている。さらに CES 型の生産関数を円形都市の合併に応用した場合，賃金か交通費のどちらが生産水準に影響するかを分析している。

＜執筆叢書＞

神頭広好『都市，交通およびニュータウンの立地』経営総合科学研究所叢書 31，2007 年

――――『都市の立地と幾何学―新しい立地論の方向性―』経営総合科学研究所叢書 33，2008 年

――――『都市の立地構造』経営総合科学研究所叢書 37，2011 年

これまでの叢書を踏襲する形で，本叢書は以下の内容を含んでいる。

A 編においては相加相乗不等式から集積の経済効果を市場の相互作用としての積に着目して，集積の経済効果が市場の生産水準の合計を上回らないこと，また市場の組み合わせとしてのクラスターを考慮した場合の解釈として，集積の経済効果がクラスターの直接的経済効果の合計を上回ることがないこと，調和平均式の意味について考察した。最後に相加相乗調和不等式およびランク・サイズモデルを用いて集積の経済効果の最大最小の範囲を示した。

B 編においては幾何学円と楕円の都市を対象にフェルマーの定理を用いて，コン

パクトシティにおけるレジャー施設の立地，さらに比較優位性によって強く作用される工業立地が交通原理のもとで都市の立地形態を変えてしまうことを明らかにした。またモーリーの定理，チャップルーオイラーの定理，Fuss の定理，およびランク・サイズモデルなどを用いて，大都市圏の中心地とコンパクトシティの中心地間の距離について分析している。最後に円形都市圏の円周上にある企業間の連携によって分割される領域の都市機能について考察される。

とりわけ B 編については，2011 年の春に日本観光学会中部部会（奈良県立大学）で発表されたもの，それが日本観光学会誌 52 号（2011 年，12 月発行）に掲載されたものに加筆修正が加えられている。この場を借りて，査読して頂いた方に謝意を表する次第である。

今年度をもって 3 月にみよし市の愛知大学名古屋校舎が終わりとなる。私の研究室からは四季折々の景観を楽しませてくれた。窓からは木々が伸びて，赤い名鉄の電車と黒笹駅が見えないくらいである。評価はどうであれ，どれだけこの研究室で論文を書いたことか。20 数年間お世話になった研究室に感謝したい。

2011 年 12 月 9 日
三好の丘にそびえ立つ
最後の研究室にて

神頭広好

[A] 系の市場と集積の経済効果
―― ランク・サイズモデルと相加相乗調和不等式 ――

I　はじめに

市場および集積の経済について検討された研究は，地域経済学および都市経済学の分野においてなされてきたが，幾何学を用いた経済地理学的研究は農業立地論の Thünen（1826），工業立地論の Launhardt（1882），Weber（1909），Palander（1935）および Lösch（1962）に代表される。これらの理論の多くは Hoover（1937）および Isard（1956）によって体系かされている。また Hotelling（1929）はミクロ経済学の競争均衡をベースに企業立地を説明しており，重力モデルに関連した商圏についての研究は Reilly（1931），Huff（1963）などがある。さらに，地理学的観点から Chritaller（1933）は都市の立地形態を研究している。とりわけ都市の六角形構造モデルは有名である。これらの研究の流れにおいて，Beckmann（1999）は立地論を整理しており，マーケティング地理学では Berry（1967）が商圏分析を行っている。

最近では，立地を踏まえた幾何学的研究では拙著（2007，2008，2009，2010，2011）に見られるが，他にフラクタルな現象を捉えた自己組織型，生産水準逓増型のモデルを組み入れた一次空間モデルなども研究されている。例えば，Krugman（1991，1995），Krugman（1998，chap. 1）および Helpman（1998，chap. 2）などがある。

ここでの空間的設定および仮定は，幾つかの市場が空間に存在する場合，それ自体を系として捉え，そこでの市場の大きさを生産力，またはそれに比例する企業数とする。また，市場が重複しているところでは，集積の経済または交渉の経済としての相互作用が生じており，この大きさは生産水準または企業数の積に依存する。

これらの空間的設定および仮定のもとで，相加相乗不等式，相加相乗調和不等式を用いて，ランク・サイズモデルを応用しながら系における相互作用としての

集積の経済を生み出すという意味での生産関数（以後，集積の経済効果）について考察される。そこでの集積の経済効果は幾何平均式がベースとなり，中位立地と集積の経済効果との関係や集積の経済効果の範囲についてシミュレーション分析が試みられる。その際，秩序ある市場規模との関連においてランク・サイズモデルが適宜応用される。

II　相加相乗不等式の生産，市場，集積の経済への応用

ここでは，系における集積の生産水準がそれぞれの市場の相互作用の組み合わせの合計によって最大化されることを仮定しよう。系において市場の数が決められているとすると，相加相乗不等式を用いて，全体の集積の経済効果としてのコブ＝ダグラス型生産水準および市場の生産水準の合計の最小値がシミュレーションされる。

1　市場の生産水準と相加相乗不等式モデル

⑴　2 個の市場を有する系の場合

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \quad (1) \qquad \text{または} \quad x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2} \quad (2)$$

この不等式における，x_1+x_2 は系における市場の総生産力を表しており，$2\sqrt{x_1x_2}$ は 2 つの市場生産の相互作用を示している。これは相互に依存しているという意味において集積の経済効果を表していると考えられる。また，$2\sqrt{x_1x_2}$ は市場の数 2 が技術水準と比例するとして，各市場の生産水準を要素とするコブ＝ダグラス型の生産関数[1]と同型である。$2\sqrt{x_1x_2}$ を系における市場の集積の経済効果とすると，「集積経済効果の市場生産力の弾力性」は 0.5 であり，どの市場に対しても同じである。このことは各市場の生産規模に対して集積の経済効果が逓増していくことを示している。ちなみに n 個の市場型は，

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = n(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (3)$$

1　この関数については，Chiang and Wainwright（2005, p. 397）を参照せよ。

で表される。したがって，(3) 式の右辺は集積の経済効果を示している。

⑵　n 個の市場を有する系において，重複する市場の組み合わせが 2 ずつ進んでいく場合，すなわち 1 つのクラスターに 2 つの市場が存在するケース：

$$\frac{x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n}{{}_nC_2}\geq\sqrt[{}_nC_2]{(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}} \tag{4}$$

または，

$$x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\geq{}_nC_2\sqrt[{}_nC_2]{(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}} \tag{5}$$

(5) 式の左辺については，1 つのクラスターに 2 つの市場が存在しており，それぞれ 2 つの市場の相互作用が直接的に積のみの形で表現されている。以後，これを直接的クラスター経済効果と呼ぼう。右辺については，それぞれ 2 つずつ関係しあう市場のクラスターの性質によっては，地域特化の集積経済効果にも成り，都市化の集積経済効果にも成りうる。すなわち，(5) 式の説明において左辺は市場の立地点に依存することはないが，右辺はすべての市場が関係しているために本社や中枢管理機能が都市の中心部にあることが重要であり，企業間の距離は無視できるくらい小さく，都市そのものの集積の経済効果を示している。なお，市場の組み合わせとしての 1 つのクラスターを 1 つの産業と捉えるならば，クラスターが多いほど多種多様な産業が多いということで，その場合の「集積の経済効果」は都心部という空間における「都市化の集積経済効果」を意味する[2]。また，ここでは企業の組み合わせが大きいほど，大きなビルに多くの企業が入るなどして規模の経済が生じ，その効果は駐車場や鉄道にも影響される。したがって，長期的には需要と供給の関係から市場の組み合わせによるクラスターの数（産業の種類の数）と都市の公共サービスとが比例的である。さらに，(5) 式の右辺を都市化の集積の経済効果として，

$$\hat{Q}={}_nC_2\sqrt[{}_nC_2]{(x_1x_2\cdots x_n)^{n-1}}={}_nC_2(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{n-1}{{}_nC_2}}={}_nC_2(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{2}{n}} \tag{6}$$

2　Hoover（1937）および Isard（1956）によると都市化の集積経済は，多種多様な産業に属する多くの企業が特定地点に集中的に立地することによってもたらされる便益を意味する。

で表されるとすると，ここでの指数に当る$\frac{2}{n}$は，都市化の集積の経済効果の市場生産弾力性を示しており，(市場間のグループ化数) / (系における市場の数)を表している。これは１つのビルに入る確実な企業数を示しており，これが大きいほど都市化の集積の経済効果の市場生産弾力性が大きくなる。

⑶　n 個の市場を有する系において，重複する市場の組み合わせが 3 ずつ進んでいく場合，すなわち１つのクラスターに 3 つの市場が存在するケース：

$$\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n}{{}_nC_3} \geq \sqrt[{}_nC_3]{(x_1x_2\cdots x_n)^{{}_{n-1}C_2}} \tag{7}$$

または

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n \geq {}_nC_3 \sqrt[{}_nC_3]{(x_1x_2\cdots x_n)^{{}_{n-1}C_2}} \tag{8}$$

⑷　n 個の市場を有する系において，重複する市場の組み合わせが m ずつ進んでいく場合，すなわち，１つのクラスターに m 個の市場が存在するケース：

$$\frac{x_1x_2x_3\cdots x_m+x_1x_2x_4\cdots x_m+\cdots+x_m\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n}{{}_nC_m} \geq \sqrt[{}_nC_m]{(x_1x_2\cdots x_n)^{{}_{n-1}C_{m-1}}} \tag{9}$$

または，

$$x_1x_2x_3\cdots x_m+x_1x_2x_4\cdots x_m+\cdots+x_m\cdots x_{n-2}x_{n-1}x_n \geq {}_nC_m(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{m}{n}} \tag{10}$$

(10) 式において等号が成立するのは，右辺の都市化の集積の経済効果と左辺の直接的クラスター経済効果の合計が等しい時である。ちなみに (10) 式を拡大解釈すると，市場のすべてが作用している点において空間を都心部（所謂，CBD）に限定するならば，右辺は都市化の集積の経済効果を，左辺は比較優位性を考慮して地域特化の直接的集積の経済効果の合計を意味している。これによって，都市化の集積の経済効果は地域特化の直接的集積の経済効果の合計を上回ることはないことが示される。また，(3) 式と (10) 式の右辺を比較すると，

$${}_nC_m(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{m}{n}} \geq n(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \tag{11}$$

が成り立つことから，系における市場の数が所与ならば，各市場が依存しあうクラスターの数が多数存在する場合は，個々の市場が単独で存在している場合より

も都市化の集積の経済効果は大きい。例えば，各市場（または産業）の数と同じ n 個のビルを建てるよりは，依存しあうすべての市場が入れる高層ビルを建設した方が企業の平均費用が低下すであろう。さらに高層ビルが建設された都市において公共サービスに対する規模の経済も働くであろう。

(10) 式を簡単化のために，$Q \geq \hat{Q}$ に置き換えると (10) 式の右辺は，

$$\hat{Q} = {}_{n}C_{m}(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{m}{n}} = \frac{n!}{(n-m)!m!} X^{\frac{m}{n}} \tag{12}$$

で示される。ただし，$X = x_1 x_2 \cdots x_n$ である。

図 1 では，(12) 式において，$n=50$，$2 \leq m \leq 40$，$X=500$，$X=1000$，$X=2000$ のケースで描かれている。

図 1 から，50 の限られた数の市場の中で，すべての市場がもたらす都市化の集積の経済効果は市場の組み合わせの数であるクラスターを増やしても市場の数の半分の 25 より少し超過するくらいのところで最大になり，そこから急に減少すること，また市場の相互依存作用 X が強いほど都市化の集積の経済効果は大きいことが分かる。市場の数は公共サービスに比例的であり，すべての市場の生産力の作用が均等な弾力性をもって都市の生産に影響しているという意味において，$\hat{Q}$ は都市化の集積の経済効果を示している。

ここで，${}_{n}C_{m}$ の対称性から，市場の組み合わせによる相互作用 X が大きくなっ

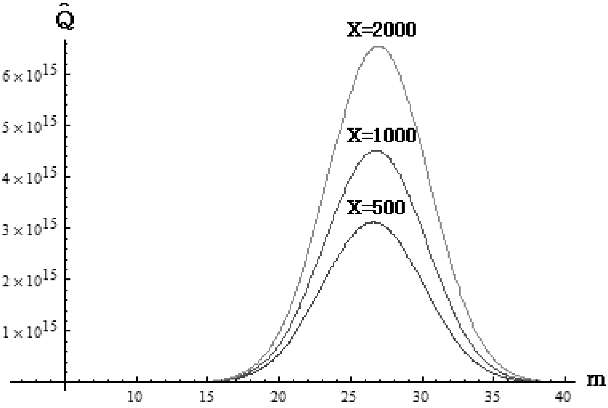


図 1

ても，その最小値を示す都市化の集積の経済効果は市場のクラスターの数 m が市場の数 n のほぼ半分より少し大きいくらいのところで最大化されることを示している。このことは市場を産業に置き換えると，都市化の集積の経済効果が多種多様な産業が多いほど高まるのではなく，市場（または産業）の数の半分くらいのクラスターとしての産業群数で，さらにそれぞれの産業の相互作用が強いことで最大化されることを示唆している。

2　ランク・サイズモデルと相加相乗不等式

ここでは，ランク・サイズモデルを分かり易くするために市場規模を都市規模に置き換える。そこで系における都市の人口は生産水準に比例しており，都市間の相互作用からくる生産性を集積の経済効果として捉えると，n 個の都市の人口の合計と集積の経済効果との関係は，相加相乗不等式から，

$$P_1\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)/n \geq \left(\frac{P_1}{(n!)^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{13}$$

または，

$$P_1\left(1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right) \geq n\left(\frac{P_1}{(n!)^\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{14}$$

で表わされる。ただし，P_1 は最大都市の人口（または生産水準），n は都市のランク，α は格差係数をそれぞれ示す。

（14）式において，$Q \geq \hat{Q}$ で置き換えると，左辺 Q は系における生産水準を，右辺 $\hat{Q}$ は系における集積の経済効果をそれぞれ示している。ちなみに（14）式の右辺は（3）式の右辺と同様に集積経済効果の生産関数とも捉えることができる。なお，図 2 は $\hat{Q}$ は $P_1=1$，$P_1=10$，$P_1=100$，$1 \leq n \leq 100$ の範囲で描かれており，人口と生産水準が比例しているために最大都市の人口が大きいほど系における集積の経済効果が高いこと，また，$P_1=1$ のケースを除くと，都市または市場の合併によって初めのうちは集積の経済効果は小さくなるが，市場の数が 10〜20 位から逓増傾向にある。なお，最大（ランク 1）都市の規模が相対的に小さい $P_1=1$ の場合，図 3 では $\hat{Q}$ は $P_1=1$ および $1 \leq n \leq 100$ の範囲で描かれており，同図から格差係数 α が小さいほど合併による集積の経済効果は逓増するが，

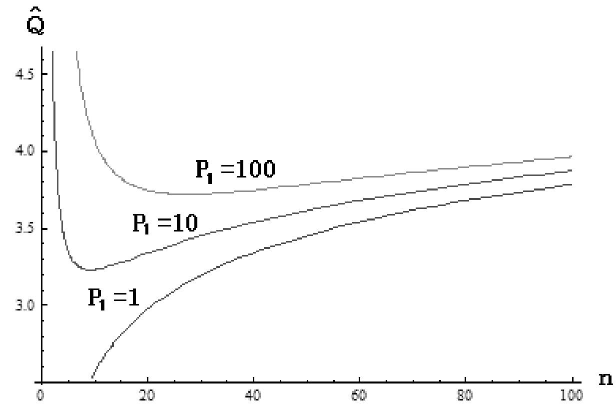


図 2

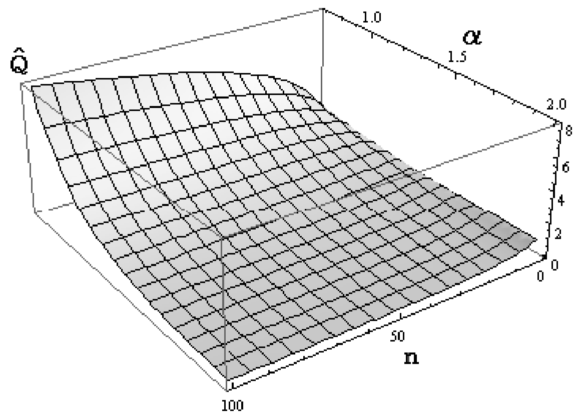


図 3

その格差が大きいほど，合併しても集積の経済効果は逓減する。また，n＝1 の時の $\hat{Q}$ が高いのは，生産水準そのものが集積の経済効果であること，すなわち最大都市の特性であることにもとづいている。

図 4 には，$\hat{Q}$ が $0.7 \leq \alpha \leq 2$ および $1 \leq n \leq 100$ の範囲で描かれており，αが小さく，n が大きいほど，$\hat{Q}$ が大きいことから都市人口または市場規模において格差がなく，都市の合併や市場の併合が多いほど集積の経済効果が大きくなること

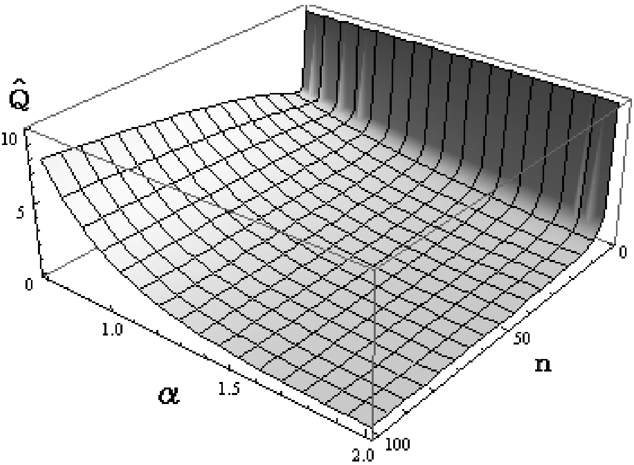


図 4

を示唆している。

上記の分析結果から，規模の最も大きな都市において，比較的大きな都市との合併による集積の経済効果は大きくないが，合併が増えていくにつれて徐々に大きくなっていくことを物語っている。

つぎに，ここではランク・サイズモデルが応用可能な系における市場を対象にして，n 個の市場が m 個の産業クラスターを形成する場合の集積の経済効果について考えよう。

$$P_1\left(\frac{1}{2^{\alpha}}\frac{1}{3^{\alpha}}\cdots\frac{1}{m^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{4^{\alpha}}\cdots\frac{1}{m^{\alpha}}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\geq\frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{P_1}{(n!)^{\alpha}}\right)^{\frac{m}{n}} \qquad (15)$$

(15) 式から，系における市場の規模の異なる相互作用による生産水準の組み合わせの合計は，常に系におけるすべての相互作用からなる生産水準を上回ることを示している。ただし，等号が成立するのは $\alpha=0$ の時である。すなわち，市場に格差が見られない場合に限り，系の組み合わせにおける相互作用の合計の最小値が存在することを意味している。

図 5 では，(15) 式の右辺を $\hat{Q}$ として，$\hat{Q}=\frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{P_1}{(n!)^{\alpha}}\right)^{\frac{m}{n}}$ の関数が

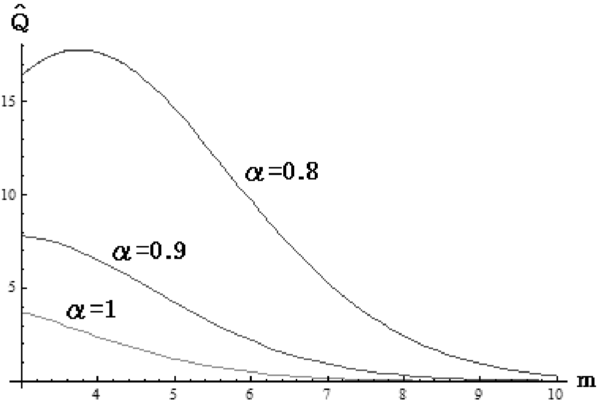
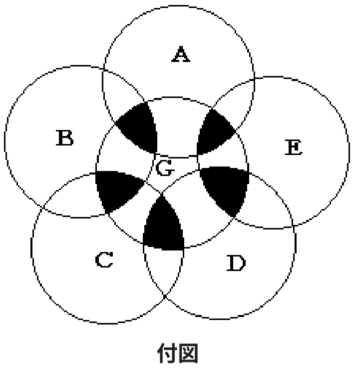


図 5

P_1＝100，n＝30，3≤m≤10，で描かれている。図 5 から，すべての市場の相互作用からなる集積の経済効果は，α が小さいほど大きく，市場数に占める組み合わせの数がより多いところで最大化される。

＜付録＞

付図は，系における 6 つの市場 A，B，C，D，E，G があり，3 つの市場の相互作用または産業クラスター（黒い領域）が 5 つ存在する場合，中央に位置する市場 G に集積の経済効果が存在している一つのデザインが示される。ちなみに，G は多種多様な産業クラスターの本部または事業所が集中的に立地している空間とみなすならば，そこには都市化の集積の経済効果が創出されている。



付図

III　集積の経済効果の範囲

1　調和平均の意味するところ

相加相乗平均不等式に調和平均を加えた不等式の関係は，

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \tag{16}$$

である。さらに（16）式の一般形は，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \tag{17}$$

で表される[3]。（以後，（17）式を相加相乗調和不等式と呼ぼう）（17）式は，系の平均市場生産力≥集積の経済効果≥調和平均市場生産力であることを示している。なお，等号が成立するのは各市場の大きさとしての生産水準が等しい場合である。調和平均に関する市場生産水準の意味づけは曖昧であるが，調和平均は（17）式から，

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} = \frac{x_1x_2\cdots x_n}{\frac{x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_{n-1}}{n}} \tag{18}$$

であることから，（18）式の右辺の分子は系における市場の全相互作用としての直接的集積の経済効果を，分母は１つの市場の生産水準としての効果が除かれているという意味で部分的相互作用としての部分的直接的集積の経済効果の平均値をそれぞれ示している。ちなみに，この式が１以上であれば，全相互作用が部分的相互作用の和の平均値を上回っており，１以下であれば全相互作用が部分的相互作用の和の平均値を下回っていることを示している。図６および図７は，単純化のために３つの円形市場と３つの四角形市場の各ケースが描かれており，黒い

3　この幾何学的証明については，Nelson（2002，邦訳 pp. 70-75），Nelson（2003, 邦訳 pp. 100-101）を参照せよ。

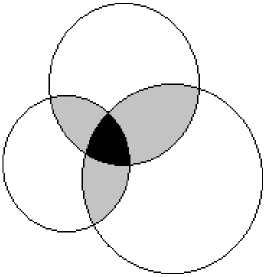


図 6

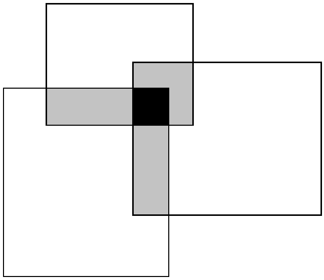


図 7

部分が分子の（完全）直接的集積の経済効果を，グレーの部分は（部分的）直接的集積の経済効果をそれぞれ示している。

さらに，(17) 式の右辺にあたる調和平均式に秩序を持たせるためにランク・サイズモデルを応用すると，

$$F=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=\frac{nx_1}{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}} \tag{19}$$

で表される。ここで，最近の都市にランク・サイズモデルを応用した結果（例えば，神頭（2009，p. 126））から，αが 1 に近いことからα＝1 とすると，

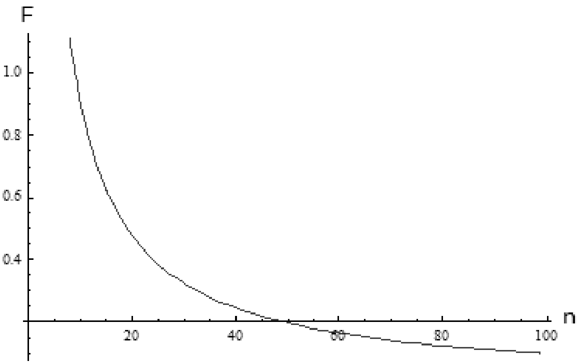


図 8

$$F=\frac{nx_1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{20}{n+1} \tag{20}$$

である。(20) 式に $x_1=10$，$1\leq n\leq 99$ として図示すると，図 8 が描かれる。

図 8 から系における市場が増えるにつれて，相対的ではあるが，徐々に市場生産の相互作用が部分的な相互作用の平均値よりも減少していくことを示している。

2　中位立地と集積の経済効果

ここで，線形上の都市を仮定すると，都市における企業の立地において総交通費用を最小にする地点は中位立地の原理で説明される。どのような企業であってもコンタクトによる利益がもたらされるとすると，総交通費が最小となるところに企業が集中してそこに集積の経済が創出されることを考えよう。

例えば，図 9 では 7 つの都市に立地している企業が商談または製品を運送する場合，総交通費を最小にする都市は都市 x_4 である。これについては，立地点を x_4 から x_5 へ移ったとすると交通費の増分は 4 つの都市 x_1，x_2，x_3，x_4 にかかってくるが，その減少分は 3 つの都市 x_5，x_6，x_7 のみである。また，x_4 から x_3 へ移った場合も同様の解釈が成り立つ。それゆえ最適立地点は x_4 である。ただし，都市の数が奇数の場合は最適な立地点は 1 つであるが，偶数の場合は真ん中の道路上か，その左右のどちらかの都市となる。

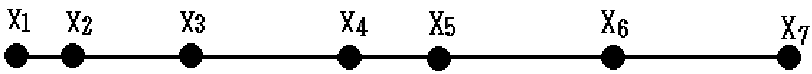


図 9

まず，中位立地の原理を相加相乗不等式に応用すると，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{2}\geq\frac{n}{2}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \tag{21}$$

が成立する。(21) 式の左辺は中位立地点の条件であり，ここでは最左端から半分の企業数またはそれに比例する生産水準を表しており，右辺は中位都市における各都市の企業間相互作用による集積の経済効果を表している。したがって，左

辺は製品などの運送費や通勤費を最小化する立地点での集積の経済効果を示していることになる。この集積の経済効果を，

$$A=\frac{n}{2}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{n}{2}\sqrt[n]{S_n} \tag{22}$$

とすると，(22) 式は図 10 で描かれる。ただし，$S_n=100$，200，400，$2\leq n\leq 20$ である。図 10 から，総交通費を最小にする都市の集積の経済効果は相互作用が大きくなっても市場の数が僅かのところで，ここでは 3 から 7 位の間で最小になる傾向がある。

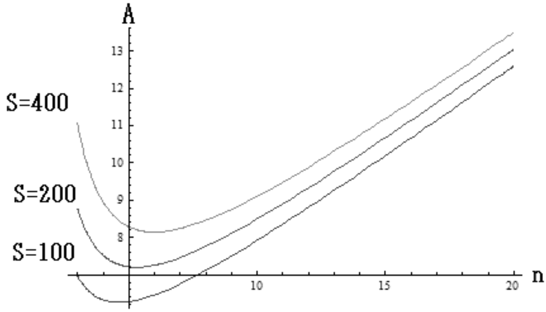


図 10

ただし，厳密には最適な都市が 1 つまたは 2 つ存在する偶数の場合は，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2}\geq n\sqrt[2n]{x_1x_2\cdots x_{2n}} \tag{23}$$

で表され，最適な都市が 1 つのみ存在する奇数の場合は，

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}}{2}\geq\frac{2n-1}{2}\sqrt[2n-1]{x_1x_2\cdots x_{2n-1}} \tag{24}$$

である。

図 10 から，総交通費を最小にする都市の集積の経済効果はすべての都市同士の相互作用が大きくなっても市場の数が僅かのところで，ここでは 3 から 7 くらいの間で最小になり，そこから急増していく傾向がある。すなわち，市場が 2 つ，3 つの初期の段階では集積の経済効果は生じるどころか減少し，そこから市場の

参入が増えるにつれて急増することから，集積の経済効果はすぐには現れないことが示される。

3　市場規模と集積の経済効果の範囲

ここでは（17）の相加相乗調和不等式に，系の市場に秩序を持たせるためにランク・サイズモデルを応用すると，

$$\frac{x_1}{n}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\geq\left(\frac{x_1^n}{(n!)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}}\geq\frac{nx_1}{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots n^{\alpha}} \tag{25}$$

で表される。ここで市場の相互作用の効果を集積の経済効果[4]として $A=\left(\frac{x_1^n}{(n!)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}}$ とすると，A の最大値を示す Amax および A の最小値を示す Amin は，それぞれ

$$Amax=\frac{x_1}{n}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \tag{26}$$

および

$$Amin=\frac{nx_1}{1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+\cdots n^{\alpha}} \tag{27}$$

で表される。(26) 式および (27) 式については図 11 に示される。ただし，最大市場の大きさを $x_1=100$，市場の数を 10 および 5 のケースについてそれぞれシミュレーションされている。

図 11 から，Amax (5) -Amin (5) および Amax (10) -Amin (10) の各ペアの関数を比較すると，市場の数が多く，市場の大きさ（生産水準）の格差を示すαが大きいほど，また市場の数 n が少なく，αが小さいほど集積の経済効果の最大と最小の範囲が小さくなることを示している。すなわち，これは市場の生産水準に差がないほど系における集積の経済効果が予想され易くなることを意味している。

4　これについては空間を考慮しなければ，一種の企業間契約と考えると，ネットワークの集積の経済効果と言える。

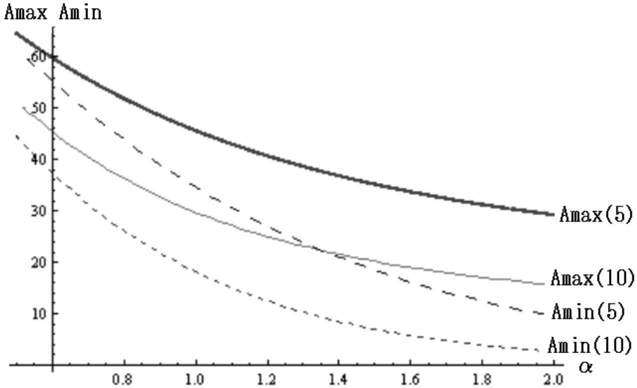


図 11

Ⅳ　おわりに

ここでは，まず相加相乗不等式を用いて，系における市場の生産水準の合計は，集積の経済効果を上回ることはないことを示し，系における市場の組み合わせ（産業クラスター）による生産水準と集積の経済効果との関係についてシミュレーション分析を試みた。また，系における市場と集積経済効果について調和平均のもつ意味を明らかにした。さらに，中位立地の原理と相加相乗不等式に着目して，総交通費が最小となる都市の集積の経済効果について考察した。最後に相加相乗調和不等式にランク・サイズモデルを応用して，都市化の集積の経済効果の範囲について分析を試みた。

主な分析結果として，系における市場の相互作用としての集積の経済効果は系における市場の数の半分くらいのクラスターの数のところで最大化される。このことは都市化の集積の経済で説明される多種多様な産業の種類にも限界があることを暗示しているように見える。また，初期において市場の数が少し増えても集積の経済効果は減少する傾向にあり，すぐには集積の経済効果は生じないことが示された。さらに，市場の生産水準に差がなければ系における集積の経済効果の範囲は予想し易くなることが分かった。ただし，ここでの集積の経済効果の関数型は基本的にはコブ＝ダグラス型であり，これにもとづくと集積経済効果の市場生産性弾力性は均等であるという厳しい仮定の下であることに注意を要する。ま

たこの弾力性について実証する必要がある。

今後は，ここで構築されたモデルを通じて都市化の集積の経済と地域特化の集積の経済を区別する方法を導くことが課題である。

参考文献

Chiang, A. C. and K. Wainwright (2005) Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4ed. ,McGraw-Hill Company.

Beckmann, M. J. (1999) Lectures on Location Theory, Springer.

Berry, B. L. (1967) Geography of Market Centers and Retail Distribution, Prentice-Hall, Inc.（共訳一奥野隆史・鈴木安昭・西岡久雄『小売業・サービス業の地理学』大明堂，1970 年）

Berry, B. L. et al (1988) Market Centers and Retail Location: Theory and Applications, Prentice-Hall, Inc.（共訳一奥野隆史・鈴木安昭・西岡久雄『小売立地の理論と応用』大明堂，1992 年）

Christaller, W. (1933) Die zentralen Orte in Suddeutschland, Gustav Fischer, Jena, 331S（邦訳 - 江沢譲爾『都市の立地と発展』大明堂，1969 年）

Dantzig, G. B. and T. L. Saaty (1973) Compact City, W. H. Freeman and Company（監訳 - 森口繁一『コンパクトシティ』日科技連出版社，1974 年）

Helpman, E. (1998) The size of regions, Topics in Public Economics by D. Pines, E. Sadka and I. Zilcha, Cambridge University Press.

Hoover, E. M. (1937) Location Theory and the Shoe and Leather Industries, Harvard University Press（邦訳 - 西岡久雄『経済立地論』大明堂，1968 年）

Huff, D. L. (1963) A Probabilistic of Shopping Trade Areas, Land Economics, Vol. 39, pp. 81-90.

Isard, W. (1956) Location and Space-Economy, The M. I. T. Press（木内信蔵監訳『立地と空間経済』朝倉書店，1964 年）

Krugman, P. (1991) Geography and Trade, The MIT Press（邦訳 - 北村行伸・高橋亘・妹尾美起『脱「国境」の経済学』東洋経済新報社，1994 年）

Krugman, P. (1995) Development, Geography, and Economic Theory, The MIT Press（邦訳 - 高中公男『産業発展と産業立地の理論』文眞堂，1999 年）

Krugman, P. (1998) A"slime mold" model of city formation, Topics in Public Economics by D. Pines, E. Sadka and I. Zilcha, Cambridge University Press.

Launhardt, W. (1882) Die Bestimmung des zweckmaBigsten Standortes einer gewerblichen Anlage, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieur 29-3（邦訳 - 金田昌司「ラウンハルト工業設備の最適立地の決定」『経済地理学の諸問題』4，経済地理学会，1967 年）

Lösch, A. (1962) Die raumliche Ordnung der Wirtschaft, Gustav Fischer Verglar, Stuttgart（邦訳 - 篠原泰三『レッシュ経済立地論』大明堂，1991 年）

Nahin, P. J. (2004) When Least is Best, Princeton University Press（邦訳 - 細川尋史『最大値と最小値の数学　上，下』シュプリンガー・ジャパン，2010 年）

Nelson, R. B. (1993) Proofs without Words, The Mathematical Association of America（共訳 - 秋山　仁・奈良知恵・酒井利訓『証明の展覧会 I 』東海大学出版会，2002 年

Nelson, R. B. (1993) Proofs without Words, The Mathematical Association of America（共訳 - 秋山　仁・奈良知恵・酒井利訓『証明の展覧会 II 』東海大学出版会，2003 年

Palander, T. (1935) Beitrage zur Standortstheories, Stockholm dissertation（邦訳 - 篠原泰三『立地論研究，（上）（下）』大明堂，1984 年）

Reilly, W. J. (1931) The Lows of Retail Gravitation, Knickerbocker Press.

Thünen, J. H. von (1826) Der Isolated Staat, in Beziehung auf Landwirtshaft and Nationalekonomie（邦訳 - 近藤康男『孤立国』農村漁村文化協会，1974 年）

Weber, A. (1909) Ueber den Standort der Industrien, Tübingen（邦訳 - 篠原泰三『工業立地論』大明堂，1986 年）

Zeitz, P. (2007) The Art and Craft of Problem Solving, Second ed., John Wiley & Sons, Inc.（共訳 - 山口文彦，松崎公紀，三橋　泉，松永多苗子，伊地知　宏『エレガントな問題解決一柔軟な発想を引き出すセンスと技一』オライリー・ジャパン，2010 年）

秋山武太郎『わかる幾何学』日新出版，1959 年

金田昌司『経済立地と土地利用』新評論，1978 年

神頭広好『都市，交通およびニュータウンの立地一平面幾何学の応用一』愛知大学経営総合科学研究所叢書 31，2007 年

神頭広好『都市の立地と幾何学一新しい立地論の方向性一』愛知大学経営総合科学研究所叢書 33，2008 年

神頭広好『都市の空間経済立地論一立地モデルの理論と応用一』古今書院，2009 年

神頭広好「コンパクトシティの都市圏の構想に向けて一幾何学から見た都市圏の定義一」『経営総合科学』愛知大学経営総合科学研究所，第 93 号，2010 年，pp. 1-21.

神頭広好『都市の立地構造』経営総合科学研究所叢書 37，2011 年

神頭広好「集積および交通にもとづく観光都市の合併による経済効果」『交通学研究 2010 年』日本交通学会，2011 年

[B] コンパクトシティの形成とレジャー施設の立地
―― 幾何学的観点からの発想 ――

I　はじめに

コンパクトシティの研究は，都市計画[5]，経営工学[6]，これらを包括する都市工学，さらには都市・経済地理学および都市経営学等[7]の各観点から行われている。ヨーロッパにおいてコンパクトシティは，総じてエネルギーおよび自然環境の確保，社会的公平性から日常生活を賄うセンターの立地，そこへのアクセシビリティなどを通じたサステイナブルシティを意味しているように見える。わが国では，コンパクトなまちづくりの事例研究が比較的多く見られる。また，一般にコンパクトシティの定義も統一されていないように見える。ちなみに，拙論（2010）ではコンパクトシティの基本形を円形としてコンパクトシティ都市圏について分析を行っている。

ここでは，まずコンパクトシティは居住者の交通費の節約と均等性の観点から，単一中心を有する円形都市[8]と 2 核心を有する楕円形都市を対象にする。また，それらの円周上にニュータウンが立地され，その立地数および立地点が異なることによるレジャー施設の立地について考察する。ついで円形の大都市圏において，工業都市が創出することで都市の形態が変わることを説明する。さらに，チャップル‐オイラーの定理から導かれる距離にランク・サイズモデルを応用することによって，円形の大都市圏の中心部と規模が異なるコンパクトシティ中心部との

5　この分野における研究は，わが国では海道（2001 年，2007 年）および玉川編（2008 年）に見られる。

6　この分野の先駆的な研究では，Dantzig and Saaty（1973）がある。

7　分野にまたがった研究については，山本（2006 年）は青森市を対象に，角本（2007 年）は富山市を対象にしたものがある。

8　円形都市を対象にして，移動距離に関してコンパクト化を研究したものに，玉川（chap. 1）および鈴木（chap. 2）（玉川編（1998）に所収）がある。

距離との関係をシミュレーションする。そこでは，大都市圏の中心部がコンパクトシティの中心部でもある場合のコンパクトシティの規模格差についてはオイラーにもとづくゼータ関数を用いることによって導く。また，Fuss の定理を応用したケースについても同様の分析を試みる。最後に，地域特化の経済から成る単一中心都市が都市化の経済から成る都市へと発展する空間におけるレジャー施設の立地について考察する。

Ⅱ　コンパクトシティにおけるレジャー施設の立地

1　円形都市のケース

ここでは，コンパクトシティを居住者の交通費の均等性および都市の中心に業務やサービス業が集中することによる効率性にもとづいた単一中心の円形都市として，円周上にニュータウンを立地することを基本とする[9]。

単一中心都市である円形都市でニュータウンが 3 つ存在する場合は，図 1 および図 2 から∠ACB および∠ANB はそれぞれ直径 AB の円周角であることから直角（90°）である。それゆえ各ニュータウンからの総距離を最小にする点（フェルマー点）は，必ず円形の都市内に存在する。とりわけ，居住者が利用するレジャー施設などは円形の都市内に立地することになり，C 地点にニュータウンが立地する場合は，都市の中心部にレジャー施設を立地することによってニュータウン居住者の総交通費を最小にする。ただし，●G は中心業務地区（Central Business District）を含む都市センターを示す。また，図 3 からニュータウン A，B，N を結ぶ三角形が正三角形の場合は，G 点がフェルマー点であるため，都心部 G にレジャー施設 L が立地されることになる。さらに，図 4 からニュータウン A，B，C，D を結ぶ四角形が正方形または 2 つの軸に対して対称性を有する長方形の場合は，対角線の交点が円の中心点 G となるため，都心部 G にレジャー施設 L が立地されることになる。他の多角形のケースでは，ほとんどが円内のどこかにレジャー施設が立地される。

9　なお，円形の都市において居住者が均等に分布するケースと円周上にニュータウンを立地するケースにおける各交通費の比較については，付録 1 を参照せよ。

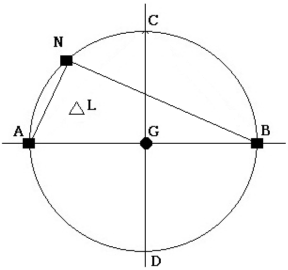


図 1

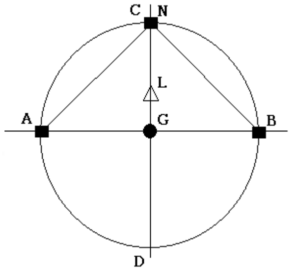


図 2

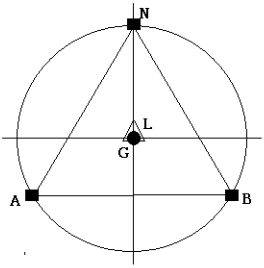


図 3

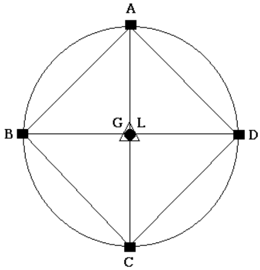


図 4

付録 1　居住者の均一分布と郊外のニュータウン立地

ここでは，円形の都市に均等に居住者が均等に立地しているケースと円形都市の周辺にニュータウンを建設するケースにおける都心部への交通費について比較する。

まず，円形都市内に居住者が均一に分布している場合，半径上の居住者の都心部への交通費（片道）は，距離当たり交通費を 1 円，人口密度を 1 とすると，

$$T_r = \int_0^r x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r = \frac{r^2}{2}$$

である。それゆえ，総交通費は，

$$T = \int_0^{\frac{r^2}{2}} 2\pi x dx = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{r^2}{2}} = \frac{r^4}{4}\pi$$

である。一方，円周上にニュータウンを立地させ，すべての居住者をそこへ移動

させると，そこから都心部への総交通費は，

$$T_n = r\pi r^2 = r^3\pi$$

である。上記の 2 つのケースを比較するために，差をとると，

$$T - T_n = \frac{r^4}{4}\pi - r^3\pi = \left(\frac{r}{4} - 1\right)r^3\pi$$

である。したがって，

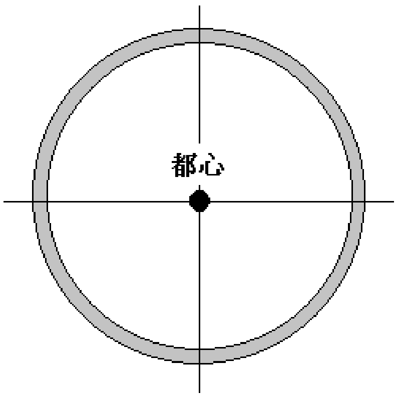
(1) $T > T_n$ ならば，$r > 4$ で円周上にニュータウンを建設する方が有利

(2) $T = T_n$ ならば，$r = 4$ で均一分布または円周上にニュータウン建設

(3) $T < T_n$ ならば，$r < 4$ で均一分布が有利

上記の結果から，付図 1−1 および付図 1−2 のように円形都市が相対的に大きい場合は，円周上にニュータウンを立地し，円形都市が相対的に小さい場合は，均一分布のままの方が有利であることを示唆している。すなわち，均等分布は交通条件が均等であることが必要であり，歩ける範囲内の都市が理想であることを物語っている。また，円周上のニュータウン立地の場合は，駅周辺で高層にすることで交通費を節約できるため，比較的遠方であることを物語っている。

ちなみに，(1) 交通費が急増する場合で郊外立地密度が高いケース，(2) 交通



付図 1−1

付図 1−2

注）●は都心を，直線は主要な鉄道を，グレーの部分は居住地をそれぞれ示す。

費が逓減する場合で都心部立地密度が高いケース，また上記同様，単純化のために人口密度を１として，１人当たりの交通費を１とすると，

(1) の場合の半径の交通費の関数を $T=r^2$ とすると，総交通費は，

$$T_s=\int_0^{\frac{r^3}{3}} 2\pi x dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{r^3}{3}}=\frac{r^6}{9}\pi$$

で表わされる。ただし，１人当たり交通費は１単位とする。

(2) の場合の半径の交通費の関数を $T=\frac{1}{r}$ とすると，総交通費は，

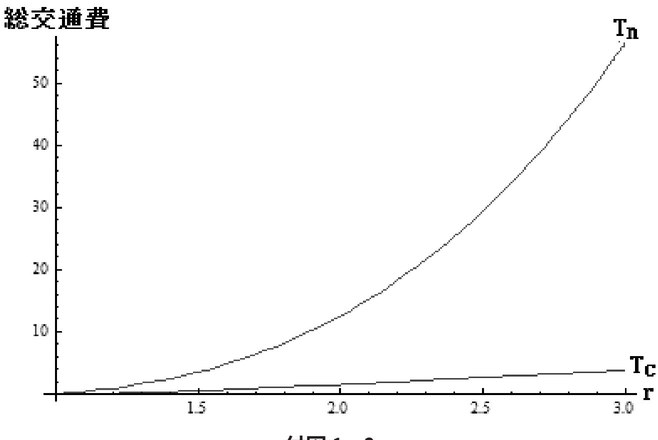
$$T_r=\int_0^{\log r} 2\pi x dx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\log r}=(\log r)^2\pi$$

で表わされる。ただし，$1\leq r$ である。

(1) のケース：$T_s-T_n=\frac{r^6}{9}\pi-r^3\pi=\left(\frac{r^2}{9}-1\right)r^3\pi$ から，$r>3$ の場合，都市周辺にニュータウンを建設することが有効である。

(2) のケース：$T_c-T_n=(\log r)^2\pi-(r-1)r^2\pi$ から，

$1\leq r$ ならば，常に$(\log r)^2<(r-1)r^2$ であることから（付図１―３参照），都心部周辺でのコンパクトシティの建設が有効である。



付図１―３

2　楕円都市のケース

2 核心都市である楕円形の都市に 3 つのニュータウンが存在する場合，図 5 のように 2 つのニュータウンＡ，Ｂが存在して，∠ACB は 120 °以上の場合，新たなニュータウン C を建設する場合，ショッピングモールや観光レジャー施設などは，そのニュータウンの近くに立地することですべての居住者の交通費を最小にすることができる（付録 2 を参照)。また，図 6 のようにニュータウン C が縦軸上になくても，∠ACB は 120 °以上になるためニュータウンの近辺に立地することになる。

これについては，図 6 のように楕円の関数が，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$$

で表わされるとすると，

$$\tan\theta_1=\frac{a-x}{y} \text{ および } \tan\theta_2=\frac{x+a}{y}$$

であることから，これを足すと，

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2a}{y}$$

となる。したがって，120 °≦$\theta_1+\theta_2$ であるか，少なくとも

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2=\tan\theta_1+\tan(120°-\theta_1)=\frac{2a}{y}$$

が成立する。なお，楕円の円周とその短軸が交わる点 C において，∠ACB が 120 °以上であれば，ニュータウン C が楕円のどの位置でも常に∠ACB が 120 °に

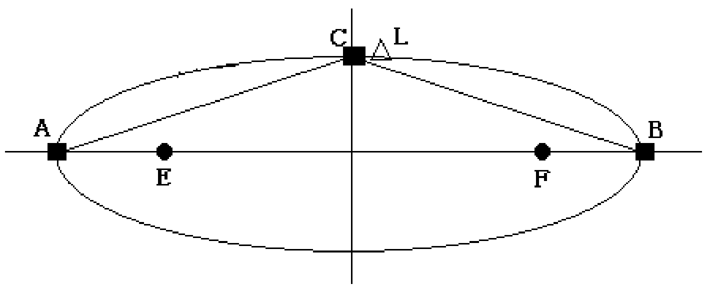


図 5

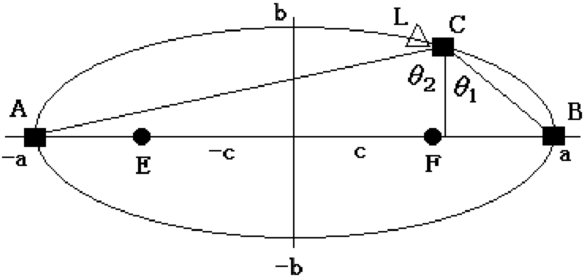


図 6

なるとは限らない。

ただし，■はニュータウンを，△はレジャー施設を，●の F はビジネス中心地区を，●の E は商業中心地区をそれぞれ示している。

図 7 から，ニュータウンの立地が 4 つで，2 つの軸に対して対称性が存在する場合は，軸の中心が（所謂，長軸と短軸と交わる点）レジャー施設 L の立地点となる。

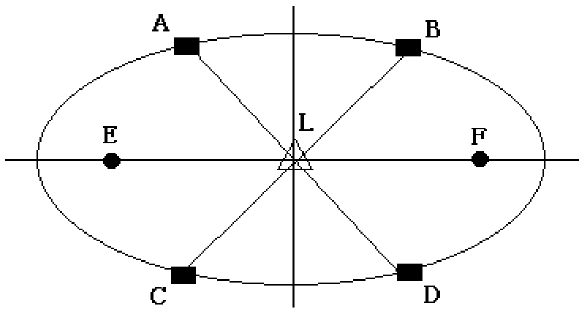


図 7

図 8 から，家計にとって，ビジネス地区 E，商業地区 F，レジャー施設 L への距離が均等になるためには，円と楕円が交わる 4 つの点にニュータウンが立地されねばならない。一方，L にニュータウンを立地するならば，A，B，C，D，E，F を 6 つの機能を有する地点としても同様である。ちなみに，これはハワードの田園都市に通じるものがある。

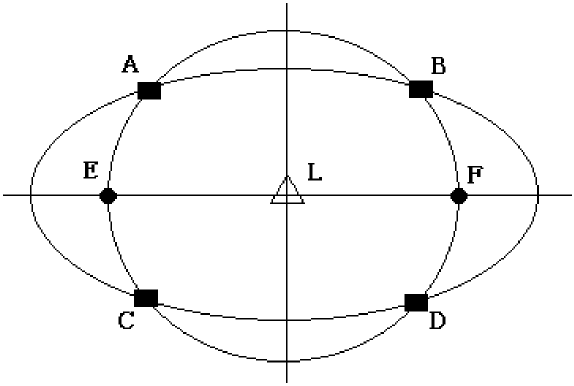
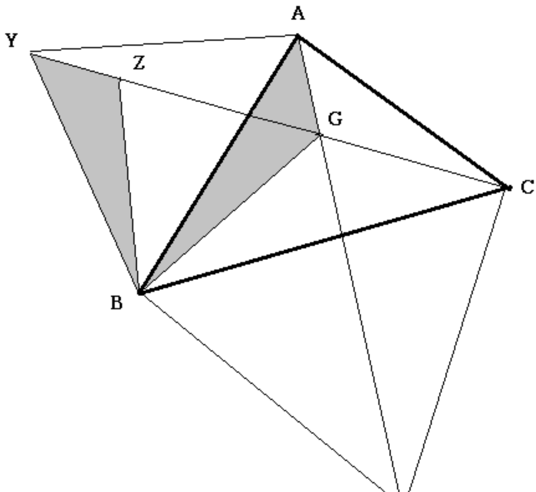


図 8

付録 2　フェルマー点の導出

2−1　頂点の角度が 120 °以下のケース

付図 2−1 から，△XBC，△YAB および△ZBG はそれぞれ正三角形になるよ



付図 2-1　∠BAC＜120 °のフェルマー点

うに作図されており，それゆえ△BYZと△BAGは合同であることから，YZ＝AG，BG＝ZGが成り立ち，YZ＋ZG＋GC＝AG＋BG＋CGから，GはA，B，Cの各点から総距離を最小にする点である[10]。ちなみに，∠AGB＝∠BGC＝∠CGA＝120°である。ここで△ABCが正三角形である場合は，Gは重心である。また△ABCの各内角は120°以下である必要がある。

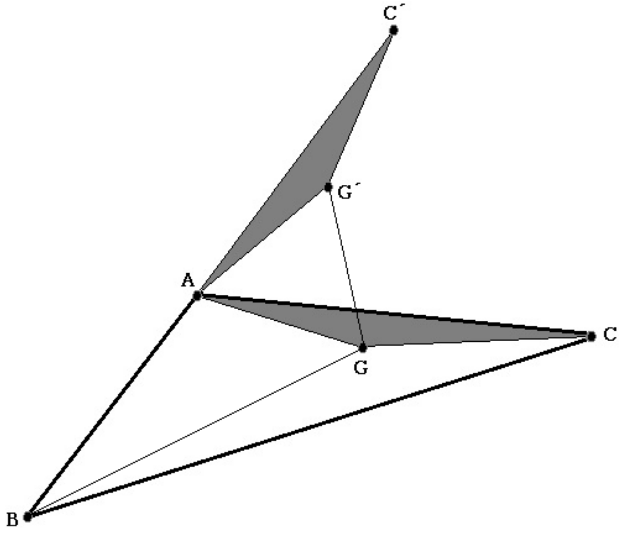
2－2　頂点の角度が120°以上のケース

∠Aが120°以上のとき，AG＋BG＋CGの最小にする点GはAである。

付図2－2から，△AGG'において∠GAG'≦60°であることからGG'≦AG＝AG'である。それゆえ，BGG'C'の最小値はBC'である。そこで，

$$AG+BG+CG \geq BG+GG'+G'C' \geq BC'=AB+AC$$

が成立する。



付図2-2　120°≦∠BACのフェルマー点

10　別の解法については，Nahin（2004，訳出，pp. 139-146）を参照せよ。

3　大都市圏におけるコンパクトシティを踏まえたレジャー施設の立地

図 9 には，居住者の交通費均等の観点から，O 点および B 点に通うニュータウンの立地経路については点線の楕円で，創出した F 点と都市圏境界地点を 2 等分する交通都市の経路については B 点を中心とする円でそれぞれ示されている。Thunen（1826）の地理設定と同様に円形の同質平野上（ここでは大都市圏）の O 点は中心地であり，その中心地では CBD（Central Business District）としての機能が集中しているビジネス都市が形成されている。また，創出した都市 F は工業都市[11]であり，O 点を中心とする大都市圏の円周には農村が分布している。ここで Christaller（1933）の交通原理に従って，都市 F と農村 A の各生産物の交換が F-A 間の 1/2 の地点で行われるとすると，そこが物流拠点となり，その経路は B 点を中心とする円となる。したがって，B 点は等距離のメリットから，工業製品や農産物が集まる商業都市となる。なお，この B 点は O 点と F 点の中点であり，したがって O 点の半径は B 点の半径の 2 倍である[12]。さらに，O 点と B 点を離心とする楕円は，点線で描かれている。したがって，楕円の性質から点線のどの地点からも O 点への距離と B 点への距離の和が一定となることから，点線上にニュータウンが建設されることになる。また，O，B，F，A の各点を通る主要道路上の C および D にニュータウンが立地されると，家計タイプのレジャー施設 L は，居住者の交通費の公平性を考慮してニュータウン間の中点に立地することになる。例えば，図 10 は東京都の地図が示されており，A が八王子，C は多摩ニュータウン，F が府中（東芝やサントリーの工場が立地），B が新宿，L が後楽園，O が中央区（東京駅が立地）にするとイメージされ易い。ただし，ここでのアルファベットの位置は役所の立地点を示す。

11　この都市は，比較優位性によって創造された都市であり，立地点は大都市圏内であればどこでもかまわない。ここでは，原料，交通条件などの比較優位性を有する工業都市を示している。

12　この証明については，秋山（1959，p. 153）を参照せよ。なお，この証明は図 9 から O 点を中心とする円に O 点および F 点から距離が等しい二等辺三角形を描くことによって導かれることが分かる。

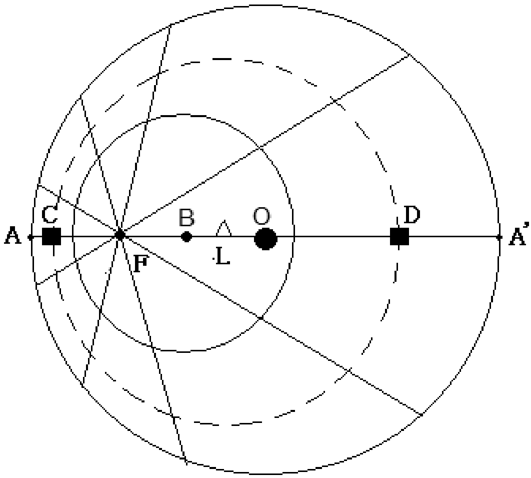


図 9　ニュータウン都市の都市構造

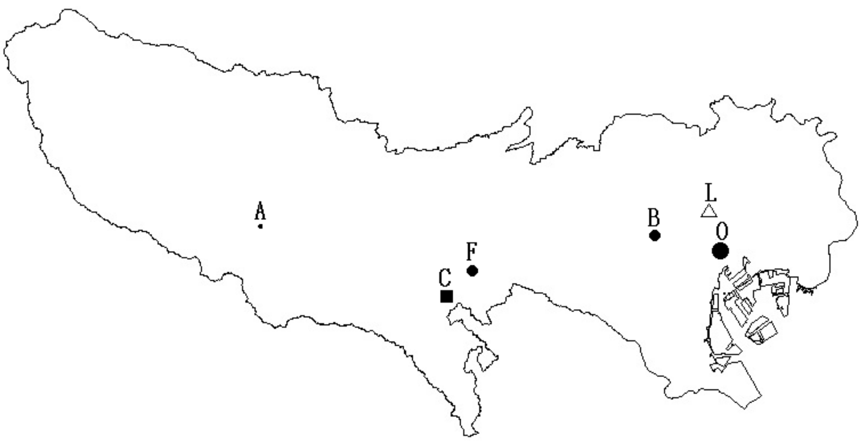


図 10

また，図 11 のように都心部に工場が立地する場合は，商業施設もそこに立地することになり，ニュータウンは交通都市の経路または内側のグレー部分に立地することになる。このことは幾何学的観点に立つと，原料産地や交通条件などの比較優位性によって作用される工業立地は都市の形状に影響を与えることを示している。

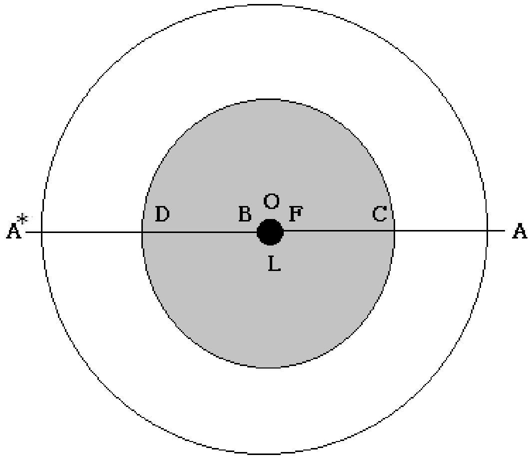


図 11

4　3 つの中心都市における都市圏構想からのレジャー施設立地

図 12 から，三角形 ABC の頂点にある 3 つの都市が存在して，各都市の都市圏の中心をなす構想はより大きな都市圏を形成するために各自の都市から最も遠い都市が境界上に立地するように扇形の都市圏を形成することにある。ついで，各都市にはニュータウンが立地しており，扇形の円周上には均等な距離で都市を除いてニュータウンを 3 つ立地することが計画されている。都市 A を都市圏の中心都市とする場合は，中心都市への交通費公平性の立場からニュータウンは 3 つの a に立地される。このような計画をもちながら 3 つの都市 A，B，C はどのようなニュータウンの立地計画を検討しあうであろうか。ここでの線は道路を仮

定しよう。

まず考えられる都市計画は，3つの各都市のニュータウンから他の2つの都市へ行く家計の交通費を考慮すると，最短距離で道路が交差する点，X，Y，Zに人が集まり，移動することになる。これらを踏まえ，モーリーの定理（1899）[13]から隣り合う3等分線によって形成される正三角形XYZの3つの頂点にニュータウンが建設され，これら3つの立地点から総交通費用を最小にする点Sに商業施設やレジャー施設が立地されることになる。つぎに考えられる立地計画は，3つの都市A，B，Cからの総交通費を最小にする点Gにニュータウン，商業施設およびレジャー施設などが建設されることである。上記のS点およびG点は3つのフェルマーの定理またはウェーバーモデルによって導かれる。

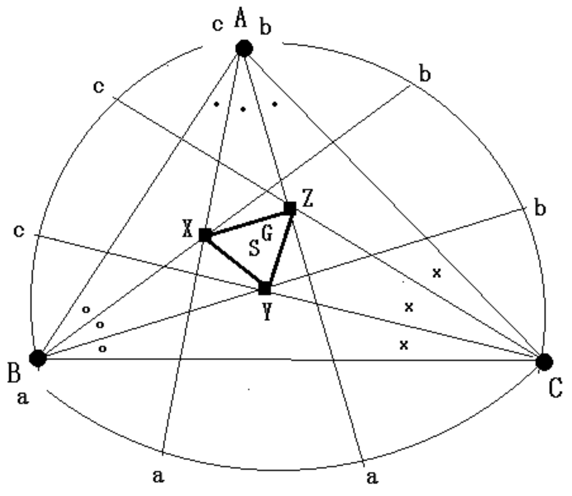


図12

13　この定理については，Higgins（2002，訳出pp. 252-255）および灘波（2008，第3節）を参照せよ。

5　コンパクトシティの規模にもとづく大都市圏中心部とレジャー施設立地間の距離

⑴　チャップル‐オイラーの定理にもとづく都市空間

図 13 から円形の大都市圏に，この大都市圏を貫く 3 つの道路に内接している円形のコンパクトシティ（図中では 3 つのコンパクトシティが描かれている）が存在するとき，大都市圏の中心部とそのコンパクトシティの中心地間の距離は，チャップル‐オイラーの定理[14]から，

$$d = \sqrt{R^2 - 2rR} \tag{1}$$

で表わされる。ただし，R は大都市圏 O の半径を，r はコンパクトシティの半径を，d は中心地間距離をそれぞれ示す。また，0≦d であることから，2r≦R を

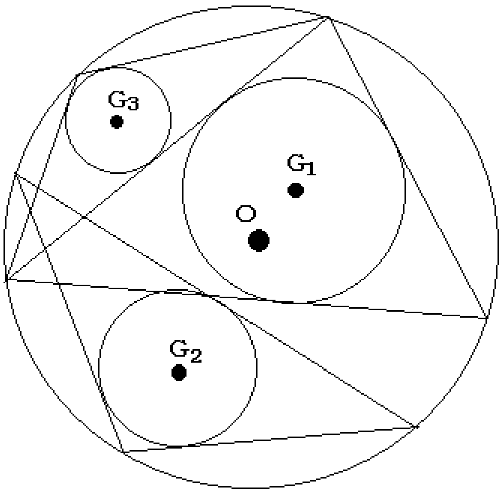


図 13

14　この定理は，1746 年にチャップルによって証明されているが，1765 年にオイラーによって証明されている。それぞれ独立して証明されていることからチャップル‐オイラーの定理と呼ばれている。これについては，安藤（2006 年，p. 78），石谷（1998 年，pp. 97-100）および岩田（1993 年，pp. 205-207）を参照せよ。

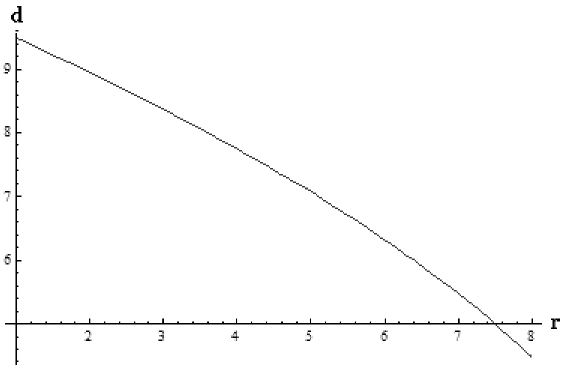


図 14

必要とする。これはコンパクトシティの半径は，大都市圏の半径の半分を超えることがないことが示される。さらに，$d=0$ のときは $R=2r$ である。ちなみに，大都市圏の境界における 3 つの地点を結ぶ三角形に内接する円およびその円に外接する三角形は無数に描けることから[15]，(1) 式は大都市の中心とコンパクトシティの中心間の距離を示しており，建設される道路はほとんどランダムと言えよう。

図 14 は，(1) 式が $R=10$，$1 \leq r \leq 8$ で描かれている。

また，ランク・サイズの法則がコンパクトシティに対して成り立っているものとすると，コンパクトシティのランク・サイズモデルは，ランク 1 およびランク n のコンパクトシティの半径をそれぞれ r_1 および r_n とすると，

$$r_n^2\pi=\frac{r_1^2\pi}{n^{\alpha}} \qquad (2) \qquad \text{または} \qquad r_n=\frac{r_1}{n^{0.5\alpha}} \qquad (3)$$

で表わされる。それゆえ，(1) 式に (3) 式を代入することによって都市圏の中心部とランク n のコンパクトシティの中心間距離 d は，

$$d=\sqrt{R^2-2\frac{r_1}{n^{0.5\alpha}}R} \qquad (4)$$

15　これについては，岩田（1993 年，p. 207）を参照せよ。

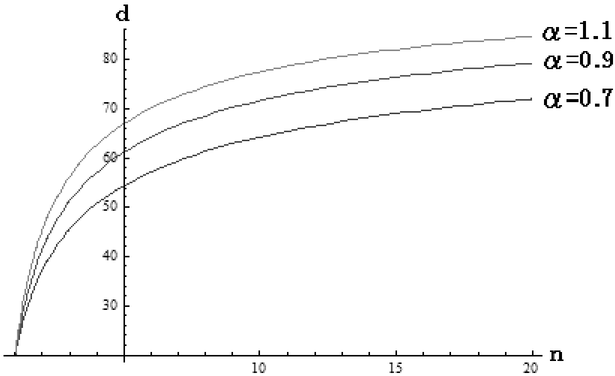


図 15

で表わされる。図 15 は（4）式において，R＝10，r_1＝4，α＝0.7，α＝0.9，α＝1.1 で描かれている。この図から，ランクが大きく（都市規模が小さく）なるほど都心―コンパクトシティ中心地間の距離が徐々に短くなることを示唆している。

さらに（4）式から，円形の大都市圏において大規模なコンパクトシティが存在するほど，中心部に近いところにレジャー施設が近づく傾向にあることを示唆している。

ところで，コンパクトシティに限らず，都市は空間において重複することはないために，円形の大都市圏の面積とその大都市圏に存在するコンパクトシティの面積の合計がほぼ一致していることを仮定するならば，

$$R^2\pi = r_1^2\pi + r_2^2\pi + r_3^2\pi + \cdots + r_n^2\pi \tag{5}$$

である。一般に，3 つの点が円周上にある三角形に内接する円は無数に存在するため，長期において，大都市圏を覆うぐらい無数にコンパクトシティが増えていくとすると，

$$R^2\pi = r_1^2\pi + r_2^2\pi + r_3^2\pi + \cdots + r_n^2\pi + \cdots (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots + r_n^2 + \cdots)\pi \tag{6}$$

で表わされる。この関数に，ランク・サイズモデルを応用すると，

$$R^2\pi = r_1^2\pi + \frac{r_1^2\pi}{2^\alpha} + \frac{r_1^2\pi}{3^\alpha} + \cdots + \frac{r_1^2\pi}{n^\alpha} + \cdots = r_1^2\pi\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots\right) \tag{7}$$

で表わされる。さらに，(7) 式を変形すると，

$$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots} \tag{8}$$

である。この左辺は，都市圏に占める最大規模（ランク 1）のコンパクトシティの大きさを示している。

ちなみに，オイラーにもとづくリーマンのゼータ関数を計算すると[16]，

$\alpha=1.01$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=100.578$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.01$

$\alpha=1.1$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=10.584$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.094$

$\alpha=1.2$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=5.592$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.179$

$\alpha=1.3$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=3.932$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.254$

$\alpha=1.4$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=3.106$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.322$

$\alpha=1.5$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=2.612$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.383$

$\alpha=2$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=1.645$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.608$

$\alpha=3$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=1.202$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.832$

$\alpha=4$ のとき，$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=1.082$ から，$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=0.924$

上記の計算結果から，コンパクトシティの大きさに格差があるほど，円形の大都市圏面積に対して最大規模のコンパクトシティが占める割合が大きいことを示

16　これについては，http:/keisan.casio.jp を用いている。

唆している。

また，最大規模のコンパクトシティの中心が大都市圏の中心に一致する場合は，チャップル‐オイラーの定理（$d=\sqrt{R^2-2rR}$）から，$d=0$ であるためには $R=2r$ が成立する必要がある。したがって，

$$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=\frac{r_1^2\pi}{4r_1^2\pi}=\frac{1}{4}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots} \tag{9}$$

を満たす α は，ゼータ関数を計算すると，α =1.3 近辺にある。それゆえコンパクトシティの格差を示す係数 α がこのあたりにあるときは，最大規模のコンパクトシティの中心部と大都市圏の中心部が一致することになる。また，面積において大都市圏に占めるこのコンパクトシティの割合は約 25%であり，このコンパクトシティは図 16 に示される正三角形の内接円である。それゆえ，この中心は，フェルマー点であり，大都市圏の円周上にある 3 つの道路の端点からの総距離が最小になる点でもあり，各道路の中点から均等で最短距離を有しているところでもある。ちなみに，この正三角形は同一円の中で最大の面積を有している三角形

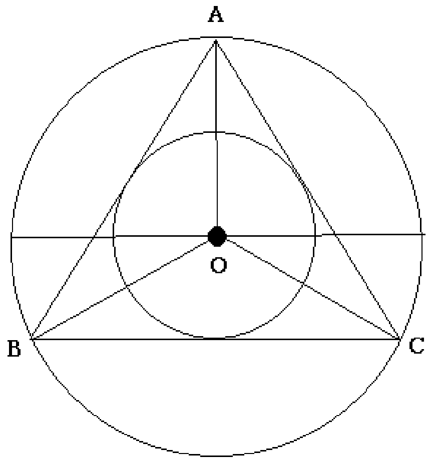


図 16

である[17]。

⑵　Fuss の定理にもとづく都市空間

図 17 から円形の大都市圏に，その大都市圏を貫く主要な 4 つの道路に接している異なる規模のコンパクトシティが存在するとき，大都市圏の中心部とコンパクトシティの中心間距離は，Fuss の定理[18]から，

$$(R^2-d^2)^2=2(R^2+d^2)r^2 \tag{10}$$

で表わされる。ただし，R は大都市圏 O の半径を，r はコンパクトシティの半径を，d は中心地間距離をそれぞれ示す。また，d=0 のときは $R=r\sqrt{2}$ である。

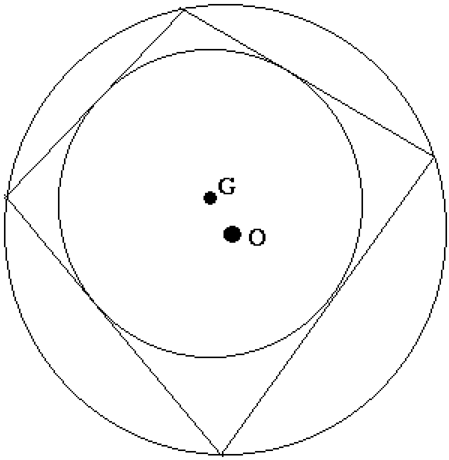


図 17

(10) 式から，

$$d^4-2(R^2+r^2)d^2+R^4-2R^2r^2=0 \tag{11}$$

17　これは，多角形の等周定理にもとづいており，灘波（2008 年，p. 63-64），前原・桑田（2011 年，p. 47）において平易に説明されている。

18　この定理については，石谷（1998 年，pp. 100-102）および岩田（1993 年，pp. 265-267）を参照せよ。

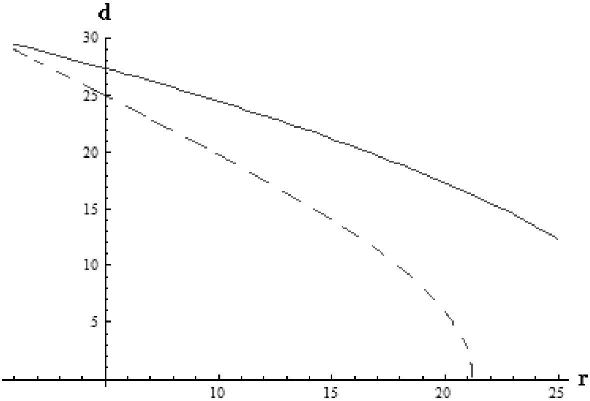


図 18

に整理される。これを d に関して解くと，

$$d=\sqrt{(R^2+r^2)+\sqrt{(R^2+r^2)^2-(R^4-2R^2r^2)}} \tag{12}$$

が導かれる。図 18 は，(12) 式において R＝30，1≦r≦25 で描かれており，線はチャップル‐オイラーの定理にもとづく距離を，点線は Fuss の定理にもとづく距離をそおれぞれ示している。

図 18 より，3 つの道路に囲まれる都市よりも 4 つの道路に囲まれる都市の方が大都市中心部からの距離が急に小さくなっていくことが分かる。

さらに (12) 式にランク・サイズモデルを応用すると，

$$d=\sqrt{(R^2+\frac{r_1^2}{n^\alpha})+\sqrt{(R^2+\frac{r_1^2}{n^\alpha})^2-(R^4-2R^2\frac{r_1^2}{n^\alpha})}} \tag{13}$$

で表わされる。この (13) 式は，1≦r≦10 で図 19 に掲げられている。

チャップル‐オイラーの定理同様に，Fuss の定理において最大規模のコンパクトシティの中心と大都市圏の中心が一致する場合は，

$$\frac{r_1^2\pi}{R^2\pi}=\frac{r_1^2\pi}{2r_1^2\pi}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots} \tag{14}$$

であることから，この (14) 式は α＝1.73 近辺において満たされる。したがっ

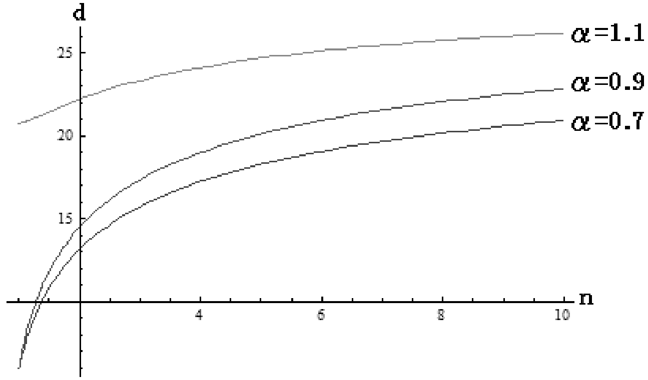


図 19

て，この値はチャップル - オイラーの定理における α＝1.29 と比べると，比較的高いことから，Fuss の定理によるコンパクトシティ間の格差が若干大きいと言えよう。また，面積において大都市圏に占めるこのコンパクトシティの割合は 50%であり，ここでのコンパクトシティは図 20 に描かれている正方形の内接円でもある。それゆえ，この中心 O は，4 つの点の対角線の中心であることから，

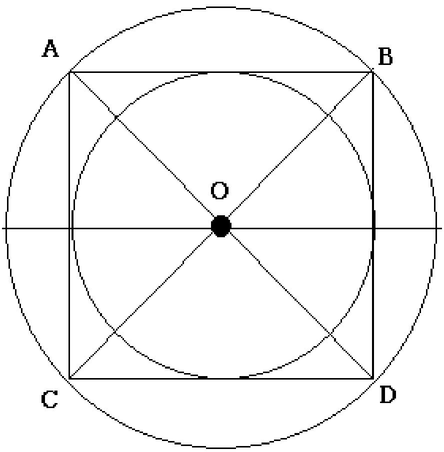


図 20

大都市圏の円周上にある 4 つの道路の端点からの総距離が最小になる点でもあり，各道路の中点から均等で最短距離のところでもある。ちなみに，円に内接する四角形の面積の中で正方形の面積が最大である[19]。

III　地域特化の経済から都市化の経済へ

まず，企業のコミュニケーションコスト均等性を重視して，円形の市場空間の円周上に企業が立地していることを考えよう。企業の交渉による円形の都市市場空間は，すべての企業が相互に交渉を行うならば，コミュニケーションコストの均等性などから，円の中心に交渉による情報が集中するはずである。しかし，現実では企業の特性によって幾つかの企業と最短距離（または最小時間）を考慮して，直接的または間接的に交渉が行われるために，円形の市場は企業間交渉によって，さらには企業が創生されればされるほど特性を持つ市場が分割されていく。ただし，ここで分割された領域（またはアクセス領域）は，円周上に存在するいくつかの企業群による一部の市場であることを意味する。すなわち，単一中心都市の中心部が一つの産業に属する多くの企業が存在しても，市場である都市を介して多種多様な産業が属する多くの企業同士が交渉することによって，それら企業によって都市空間が占有されていくとすると，やがては都市化の経済にもとづく都市へと変貌する。最終的には市場の空間＝交渉の空間＝都市（地理）空間であることを意味する。図 21〜24 は，円形の市場の境界に企業が参入して，そこから交渉によって円市場を分割していく過程が企業数 1 から 5 までについて描かれている[20]。ただし，ここで注意するべき点は，なるべく多くのクラスターを創

19　これについては，灘波（2008 年，pp. 64-65）および前原・桑田（2011 年，pp. 53-54）において平易に説明されている。後者では，正三角形同様に正 n 角形のときに，面積が最大になることが証明されている。一方，Nahin　(2004，訳出（上）pp. 7-9）は，代数を使って正方形が四角形で面積が最大になることを説明している。

20　一般に円周上の点間を結ぶ線による分割領域の最大数については，レオ・モーザー（Leo Moser）が Scientific American 1969/8 に問題を提起したことから，ここでの数列はモーザー数列と名付けられている。これについては，Ulin（1982，訳出 pp. 63-67 および pp. 89-91）を参照せよ。

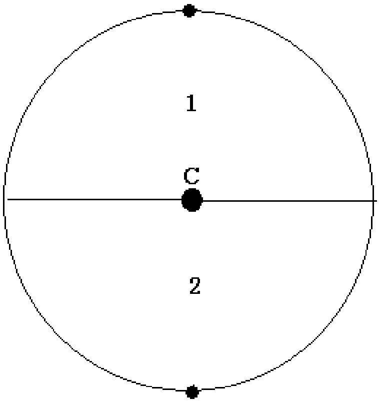


図 20　2 つの企業のケース

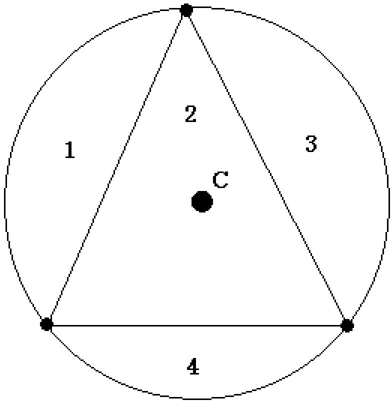


図 21　3 つの企業のケース

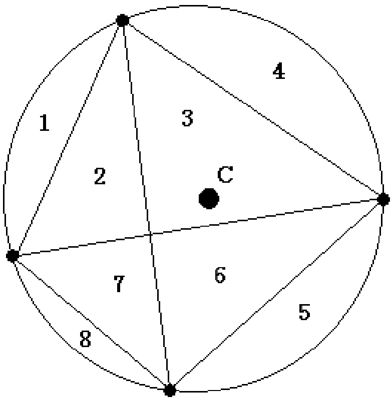


図 22　4 つの企業のケース

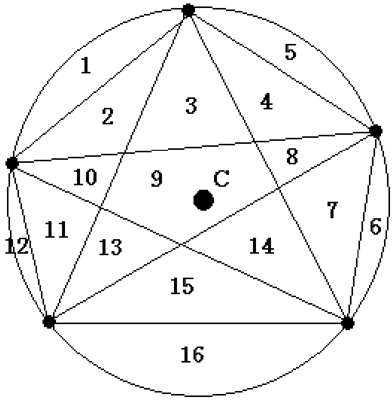


図 23　5 つの企業のケース

出するならば，3 本の線が交わらないことであり，これは 6 つの企業の情報または集積が 1 つにまとまらないことを意味する。所謂，6 つの企業が 1 つになると，全体のクラスターの数が減ることを示唆している。

ここで，4 つの企業が単一中心都市へ参入する場合を考えよう。図 25 の ABX のグレー領域では，企業 A と企業 B がそれぞれ図中において立地しており，X

点は企業 A と企業 D，企業 B と企業 E のそれぞれ交渉の結果，情報が集められる地点である。この領域は，これらの交渉による情報収集のための立地点 X と企業 A と企業 B との力関係で決まるところの関連し合う企業群の立地領域を示している。すなわち，A は B と E の交渉による情報が必要であり，B は A と D の交渉による情報が必要であり，X 地点においては多種多様な情報が集まる地点となる。このように交渉を繰り返しながら纏まった企業群がつぎつぎに形成されていくのである。ちなみに，X 地点には情報を求めて多種多様な産業に属する多くの企業が集中する。また，分割の数は特徴が異なる市場クラスターの数でもあるため，空間領域の意味についてはこだわる必要はない。ただし，この領域には，最初に単一産業 C によって形成された市場としての都市であるため，この単一産業に属する企業 c が含まれている。後に残されたすべての領域も同様に解釈される。具体的な例として，この都市 C は自動車産業都市として，c を自動車産業に関する事業所，A を広告業，B をマスコミ関連業，D を印刷業，E を出版業として考えてみてください。ちなみに，愛知県で例えるならば C は豊田市で，X は名古屋市がそれぞれイメージされる。

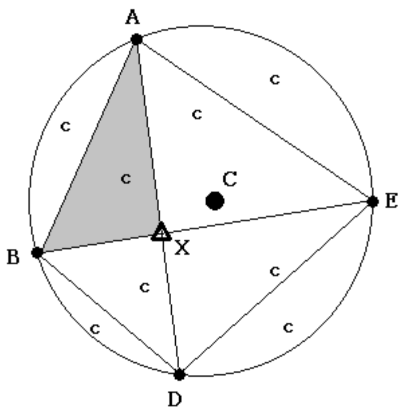


図 25

ちなみに，企業数 n による分割領域数 V(n) は，

$$V(n)=\frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24} \tag{15}$$

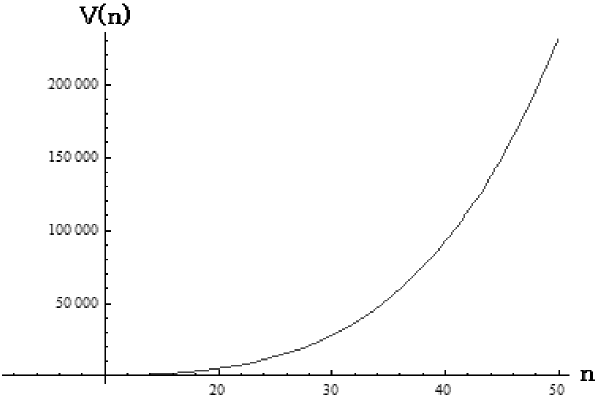


図 26

で表わされる[21]。この関数は図 26 で示される。

図 26 より，ある企業の参入が多種多様な産業に属する企業クラスター（例えば，印刷，広告，出版業を 1 つにしたクラスター）の数を急増させていくことが示されており，これによって都市が地域特化の経済よりも都市化の経済を享受する都市へと発展することを物語っているように見える。したがって，この意味において，都市化度 U は，

$$U=\frac{V(n)}{r^2\pi} \tag{16}$$

で表わされる。ただし，r は円形都市（地理空間＝市場空間＝交渉空間）の半径を示す。

ちなみに，レジャー施設の立地については，都市 X には都市型のレジャー施設（例えば，映画館や劇場など）が，都市 C には地域型のレジャー施設（例えば，パチンコやボーリング場など）が，それぞれ立地される。

21　これについては，Posamentier and Lehmann（2007，chap. 3，訳出，第 3 章）によって説明されている。

Ⅳ　おわりに

本研究では，コンパクトシティを交通費による居住者の公平性の観点から，円または楕円の円周にニュータウンを立地して，就業機会および商業施設を円の中心または楕円の離心にもっていく都市としている。その上でコンパクトシティにおけるレジャー施設の立地について幾何学を応用して，楕円形のコンパクトシティにおいてニュータウンが3つ立地するケースにおいて，頂点にあるニュータウンの立地点をはさむ角度によっては，そのニュータウンの近くに立地することで交通費を低くすることができることを明らかにした。これはフェルマーの定理にもとづいている。ついで，円形の都市圏における都市構造から，レジャー施設はニュータウンの経路を示す楕円の中心に立地することが考察された。ここで重要なことは工業立地が都市の立地形態を変えてしまうことである。また，モーリーの定理の都市計画への応用可能性について示した。さらに，チャップル‐オイラーの定理にランク・サイズモデルを応用することによって，大都市圏の中心部と規模が異なるコンパクトシティ中心部との距離との関係を導き，都市のランクが大きく，都市間の規模に差があるほど距離は長くなることが分かった。そこでは，大都市圏の中心部がコンパクトシティの中心部でもある場合のランク1のコンパクトシティと他のコンパクトシティの規模格差についてオイラーにもとづくゼータ関数を用いることによって導いた。また，Fuss の定理を応用したケースについても同様の分析を行った。最後に地域特化の経済を有する単一中心都市が，多種類（4つ）の産業が参入することで企業の交渉が集中する地点に都市化の経済が生まれ，そこにそれを享受する都市が創出されることを示した。

今後は，円形，楕円形のみならず多角的形状に関わる幾何定理をシステマティックに捉え，現実に対応しうる立地の法則性を発見することが課題として残される。

参考文献

Christaller, W.（1933）Die zentralen Orte in Suddeutschland, Gustav Fischer, Jena, 331S（邦訳‐江沢譲爾『都市の立地と発展』大明堂，1969年）

Dantzig, G. B. and T. L. Saaty (1973) Compact City, W. H. Freeman and Company (監訳 - 森口繁一『コンパクトシティ』日科技連出版社，1974 年)
Higgins, P. M. (2002) Mathematics for the Imagination, Oxford University Press (邦訳 - 富永　星『想像力で解く数学』白揚社，2005 年
Nahin, P. J. (2004) When Least is Best, Princeton University Press (邦訳 - 細川尋史『最大値と最小値の数学（上）(下)』シュプリンガー・ジャパン，2010 年)
Posamentier, A. S. and I. Lehmann (2007) The Fabulous Fibonacci Numbers, Prometheus Books（邦訳 - 松浦俊輔『不思議な数列フィボナッチの秘密』日経 BP 社，2010 年)
Thünen, J. H. von (1826) Der Isolated Staat, in Beziehung auf Landwirtshaft and Nationalekonomie（邦訳 - 近藤康男『孤立国』農村漁村文化協会，1974 年)
Ulin, B. (1982) Der Losung auf der Spur, Verlag Freies Geistesleben & Urachhaus GmbH（邦訳 - 丹羽敏雄・森章吾『シュタイナー学校の数学読本』ちくま学芸文庫，2011 年)
Weber, A. (1909) Ueber den Standort der Industrien, Tübingen（邦訳 - 篠原泰三『工業立地論』大明堂，1986 年)
秋山武太郎『わかる幾何学』日新出版，1959 年
安藤哲哉『三角形と円の幾何学』海鳴社，2006 年
石谷　茂『数学ひとり旅』現代数学社，1998 年
岩田至康編『幾何学大辞典 1』槇書店（初版 1971 年)，10 版，1993 年
海道清信『コンパクトシティ』学芸出版社，2001
海道清信『コンパクトシティの計画とデザイン』学芸出版社，2007 年
角本伸晃「富山市のコンパクトシティへの取り組み―人口減少下の都市政策に向けて―」(神頭広好・角本伸晃・麻生憲一・長橋　透・藤井孝宗著『北陸地域のまちづくり研究』愛知大学経営総合科学研究所叢書 30，2007 年所収)
神頭広好「コンパクトシティの都市圏の構想に向けて―幾何学から見た都市圏の定義―」『経営総合科学』愛知大学経営総合科学研究所，第 93 号，2010 年，pp. 1-21.
神頭広好「集積および交通にもとづく観光都市の合併による経済効果」『交通学研究 2010 年』日本交通学会，2011 年，pp.65-74.
神頭広好「コンパクトシティにおけるレジャー施設の立地―幾何学からの発想―」『日本観光学会誌』第 52 号，2011 年，12 月刊行予定
鈴木　浩『日本版　コンパクトシティ』学陽書房，2007 年
玉川英則編『コンパクトシティ再考―理論的検証から都市像の探求へ―』学芸出版社，2008 年

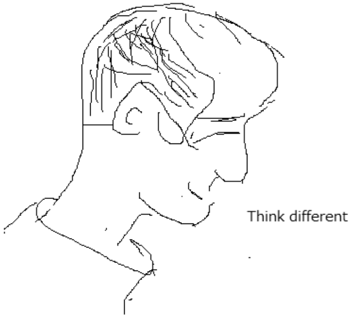
灘波　誠『平面図形の幾何学』現代数学社，2008 年
前原　潤・桑田孝泰『知っておきたい幾何の定理』共立出版，2011 年
丸尾直美・三橋博巳・廣野桂子・矢口和宏編著『ECO シティ』中央経済社，2010 年
山本恭逸編『コンパクトシティ―青森市の挑戦―』ぎょうせい，2006 年

あとがき

本著者の最近の研究は，幾何学，地理学，都市経済学をベースに，コンパクトシティの性格を定義することによって，円形か楕円形のどちらの都市が居住者にとって有利か，また円形都市の合併による集積の経済および交通費用の節約などについて比較分析などを試みている。そこでは都市の大きさとの関係からランク・サイズモデルが適宜応用されている。系における円形の都市の形態については，数学者であるデカルト，フェルマー，パスカル，オイラーなどの各先生方の定理をはじめ和算家の方々の定理なども利用させて頂いた。ここで気づいたことは，点としての学問が世界空間と時間によって結びついていることである。一般にSoddy の定理と呼ばれているものは，すでにデカルトおよび和算家によって報告されている。

今日のように情報が行き交う時代では，情報に流されることなく当たり前のことから飛び出す発想，ぶれることのない研究が大事であり，その上で資金が必要ならば集めればよい。資金を集めることを目標にして，それに合わせて研究をするという風潮が高まっていることに危惧の念を抱く。

このことを思うに付けて，Apple 社を築いてきたスティーブ・ジョブス (1955～2011) の名言が思い出される。



illustrated by H.Kozu

著者紹介

神頭広好（こうず ひろよし）

KOZU HIROYOSHI

愛知大学経営学部教授

専　攻　経営立地論，立地分析

愛知大学経営総合科学研究所叢書 38

都市の形成，市場および集積の経済

2012 年 2 月 17 日発行

著　　者　　神　頭　広　好

発　行　所　　愛知大学経営総合科学研究所

〒470-0296　愛知県みよし市黒笹町清水 370

印刷・製本　　株式会社　一 誠 社

名古屋市昭和区下構町 2-22

[非売品]

ISBN 978-4-9903681-7-3