愛知大学経営総合科学研究所叢書　41

都市化の集積経済効果と空間距離

神頭広好　著

$V_n = A + P(n)\sin Bn$

$P_n = \frac{P_1}{n^\alpha}$

$F_{1n} = G\frac{P_1 P_n}{d_{1n}^2}$

$E = mc^2$

愛知大学経営総合科学研究所

Urban Agglomeration Economies and Spatial Distance

Hiroyoshi Kozu
Aichi University

2013
Institute of Managerial Research
Aichi University

はしがき

著者の目的は，都市化の集積経済を空間的に解明することである。世界的なJournal を読んでも集積の経済モデルの多くは最終的に地域特化の経済が説明されている。また，地代，人口や企業に関連する密度を対象に空間的変化にもとづいて都市化の経済が説明されているものもあるが，基本的な定義は未だに存在していない気がする。地理学においても CBD に関する定義はその時代にあったとしても情報化が進む時代では建物を含め空間の使い方が異なってくる。そこで著者はまず幾何学，ランク・サイズの法則，ミクロ経済学の理論を融合させた空間システム，とりわけ都市合併モデルやコンパクトシティモデルを構築することによって都市の中心となる位置について研究を重ねてきた。ここでは，フェルマーをはじめオイラー，リーマンおよび和算家などの定理が必要であった。例えば，ウェーバーモデルを計算しなくともフェルマーの幾何定理が分かると，120 °を武器にして大体の立地点は検討がつく。また，関孝和に代表される和算における幾何定理を学んでいくと空間的アイディアが拡がっていく。さらに，無数という空間を仮定するとその空間にオイラーやリーマンのゼータ関数を利用することによって，ランク・サイズモデルの係数が導かれる。このことにたいへん驚かされた。

例えば，$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\cdots=\frac{\pi^2}{6}$である。(証明省略)

過去の叢書では，幾何学の定理にランク・サイズモデルを応用して，オイラーに発するリーマンのゼータ関数を推計することで円形の都市圏に無数存在するコンパクトシティの規模格差係数が導かれている。ここで，分析者が無数をどのように考えるかは問題であることは言うまでもない。

本叢書は，第 I 部において相加相乗不等式とランク・サイズモデル，さらには労働の要素から成る市場（厳密には市場または産業空間における企業）の生産関数を用いて，都市化の集積経済効果を説明しようとするものである。基本的には，各市場の交渉は首都圏の都心部で行われ，交渉は相互作用である相乗平均に市場

の数を乗じたもので表される。ここでは各市場の生産の合計を超えることはないこと，また都心部であるからこそ公共サービスが各企業の経済効果に均等に割り振られることが前提となる。これらのもとで，市場の生産の労働量弾力性を市場の比較優位性と捉え，生産の格差および市場数に関するシミュレーション分析がなされている。ついで，不等式の定理を都市の集積経済効果に応用する可能性を示唆している。最後に中位立地の原理のもとで都市の格差係数と都市の数から総交通費を最小にするモデルの構築を試みている。

第Ⅱ部においてランク・サイズモデルと引力（一般に重力）モデルの共通する質量の積に着目して，引力の同等性から距離とランクとの関係を導いている。また，そこで推計される距離を用いて，三角関数から導かれる信号関数を鉄道に応用している。さらに，ラテン方陣とランク・サイズの法則を用いて，都市の数で決まる円形の都市圏における秩序ある都市の立地が都市の数が偶数であるか，奇数であるかによって第3番目にできる鉄道上の都市の規模またはそれと比例する駅の規模が異なることを示している。最後にカテナリ－曲線を用いて2つの大都市の引力による町の盛衰の道程について分析している。

上記の内容を通じて，都市化の集積経済効果にしても駅立地にしても机上の理論であるが，今後は検証する必要がある。

本叢書の内容の多くは，厳密さよりも頭に描かれたモデルを書き留めたものである。今後は試行錯誤を繰り返しながら構築されたモデルをさらに発展させていく必要がある。

この場を借りて，これまで地域，交通および観光などの研究会等で刺激を与えて下さった研究仲間，さらに数学においてご助言を頂いた玉置光司先生（愛知大学）に謝意を表する次第である。

2013年1月2日

朝日が見える８階のマンション（自宅）にて

神頭広好

第Ⅰ部　都市化の集積経済効果に関する シミュレーションモデル

Abstract: The simulation model about the effect of urbanization economies

First we construct the effect model of urbanization economies（EMUE）by applying a production function with comparative advantage as labor elasticity to geometric mean equation derived from inequality. Second we attempt simulation analysis about EMUE using rank-size rule. Third we consider the possibility for applying some theorems of inequality to regional science. Fourth we find that the gap coefficient of the scale of market or urban in a system is 1.72 or less in the case which the level of production of a country is more than twice of the level of production of the largest market under rank-size rule. Last we can find the city which makes the total transportation cost the minimum using the city scale gap coefficient estimated from a rank-size model.

Keywords: urbanization economies, agglomeration, AM-GM inequality, rank-size rule

Ⅰ　はじめに

集積の経済については，空間的な観点からは主に Weber（1909）および Hoover（1937）などによって説明されている。これらを整理し，発展されたものに Isard（1956）などがある。集積の経済に関するモデルについては Duranton and Puga（2004）および Stuart and Strange（2006）によって整理されている。また，実証分析については，Henderson（1988）は地域特化の経済についてブラジルおよびアメリカ合衆国を対象に行っている。一方都市化の経済については，アメリカ合衆国の大都市を中心に人口および企業密度の空間的分散の観点から文献紹介を踏まえ O'Sullivan（2012）によって説明がなされている。最近では農業，

製造業と都市との空間的立地関係および自己組織化についての理論的研究はKrugman（1995，1996）などに見られるが，都市化の経済に関する理論的モデルなどはあまり見られない。ちなみに神頭（2012a，2012b）では，相加相乗平均不等式（AM-GM inequality）を応用することによって，都市化の集積経済効果についてシミュレーション分析がなされている。

ここでは，まず神頭（2012a，2012b）にもとづいて都市化の集積経済効果[1]を整理する。その際，系における市場の組み合わせによってクラスター化されるケースの都市化の集積経済効果についてもランク・サイズの法則を取り入れてシミュレーション分析が行われる。ついで相加相乗平均不等式を用いた幾つかの都市化の集積経済効果モデルを構築する。ここでのモデルでは，市場を産業とも都市ともとれる形で使われているが，市場は厳密には市場に存在する企業を指しており，市場を産業に置き換えた方が理解し易いが，生産要素としての労働者が消費者でもあり，空間的イメージを持たせるために産業にも都市にも近い概念を踏まえ，産業空間として「市場」という言葉を敢えて使っている。また不等式定理の地域科学への応用可能性について検討する。さらに当該国の総生産水準はその国の最大の市場生産水準の2倍以上ある場合は市場の格差係数は2以下であることが示される。最後に，中位立地の原理にランク・サイズモデルを応用することによって系における総交通費を最小にする線形上の都市のランクが導かれる。

Ⅱ　都市化の集積経済効果モデル

ここでのモデルは，神頭（2012b）の訂正を踏まえつつ，都市化の集積経済効果の不等式への応用可能性について説明したものである。モデルの構築にあたり，つぎの諸仮定を設定する。

(1) 系の生産水準は，系における各市場の生産水準の合計から成る。

(2) 各市場の生産水準の要素は労働である。

1　これは，都市化の経済効果と同等の意味をもつが，多種多様な市場（現実的には産業）に属する多くの企業およびそれら企業の数と比例する公共サービスが都心部に集積していることを強調したいがために，敢えて都市化の集積経済効果とした。(以下同様)

(3) 系における各市場の大きさである生産水準は労働量に比例的であり[2]，系における総生産水準は各市場の比較優位性に影響される[3]。なお，ここでの比較優位性は，市場の環境や労働者の技能などを包括する市場の生産水準の労働量弾力性で表される。

(4) 系における市場は互いに関連しあっており，市場間の交渉（face-to-face の商談）のための交通費の節約から各市場の中枢管理機能は都心部に集中している。また，そこでの市場間の交渉力および交渉回数は各市場の生産水準に依存しており，この交渉力[4]の成果は少なくとも系の総生産水準を押し上げる効果を有している。それゆえ，市場が有する交渉力が事業所の規模，労働量などに比例的であるとすれば，市場間の交渉による経済効果は直接的にも，間接的にも都心部における経済に影響を与えている。この経済的影響がここでは「都市化の集積経済効果」である。

(5) (4) における都市化の集積経済効果[5]は，系における市場の生産水準の相加相乗調和平均不等式から導かれる相乗平均である幾何平均にもとづいており[6]，この幾何平均に市場の数を乗じたものである。この値は，都心部に集中する市場の数およびそれぞれの生産水準の大きさに比例的である。

上記の仮定のもとで，系における総生産水準 Q は，

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \tag{1}$$

2　これについては，ここでの市場を労働市場としての通勤圏とすると，空間的な市場の大きさは労働量の大きさに比例的である。一方市場を商業市場として労働者＝消費者と考えることもできる。

3　比較優位性が市場の生産水準に内部化されているモデルについては，神頭（2012b，付録 2）を参照せよ。

4　これは，各市場における都心部での人事採用などの特性に関わっている。

5　これについては，市場の数に比例しており，各市場の中枢管理機能の集積によってもたらされる生産水準の積としての相互作用を考慮して，これら機能が集積している都心部における集積の経済効果を意味している。ちなみに，これは系の総生産水準の最小値の関数でもある。

6　これについては，都市化の集積経済効果の最大値は系の総生産水準であることを示している。

で表わされる。また，市場 n の生産関数は，

$$Q_n = P_n^{a_n} \tag{2}$$

で表わされる。ただし，P_n は市場 n の労働量，a_n は市場 n の生産の労働量弾力性（以後，これを「比較優位性弾力性」と呼ぶ）をそれぞれ示す。

したがって，(2) 式を (1) 式に代入すると，系の総生産水準は，

$$Q = P_1^{a_1} + P_2^{a_2} + \cdots + P_n^{a_n} \tag{3}$$

で表される。また，(3) 式を相加相乗平均不等式に応用すると，

$$\frac{P_1^{a_1} + P_2^{a_2} + \cdots + P_n^{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_n^{a_n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{P_1^{a_1}} + \frac{1}{P_2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{P_n^{a_n}}} \tag{4}$$

または

$$P_1^{a_1} + P_2^{a_2} + \cdots + P_n^{a_n} \geq n\sqrt[n]{P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_n^{a_n}} \geq \frac{n}{\frac{1}{P_1^{a_1}} + \frac{1}{P_2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{P_n^{a_n}}} \tag{5}$$

で表される。さらに，(5) 式の中間の項を 1 つの関数として表示すると，

$$U = n\sqrt[n]{P_1^{a_1} P_2^{a_2} \cdots P_n^{a_n}} \tag{6}$$

または，

$$\log U = \log n + \frac{a_1}{n}\log P_1 + \frac{a_2}{n}\log P_2 + \cdots + \frac{a_n}{n}\log P_n \tag{7}$$

で表される。(6) 式については $\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \cdots + \frac{a_n}{n} = 1$ であるならばコブ＝ダグラス型生産関数に準じている。また (6) 式を対数変換した (7) 式から，都市化の集積経済効果を U とすると，U は市場の数 n および各市場の生産水準に比例的であり，$\frac{a_n}{n}$ は「都市化の集積経済効果 U の市場 n 労働量弾力性」を意味しており，市場の数 n が増えるにつれて減少する傾向を示している。これについては，市場の数が多いほど競争が高まるために各市場生産水準の労働量弾力性に作用している比較優位性が市場の数で除されることによって薄れていくことを物語っている。したがって，U を各市場との交渉によってもたらされる経済水準とし

て捉えるならば，U は一種の都市化の集積経済効果[7]を示していると考えられる。(5) 式からは「唯一の都心部の集積の経済効果は系における総生産水準を上回ることがないこと，翻って都市化の集積経済効果は，系の総生産水準の最小値であること」を示している。それゆえ，U の範囲は (5) 式によって示されている[8]。

1　労働生産水準にランク・サイズの法則が成立しているケース

系の市場の労働水準にランク・サイズの法則[9]が成立しているとすると，市場 n の労働水準は，

$$P_n=\frac{P_1}{n^{\beta}} \tag{8}$$

で表される。ついで，(8) 式を (4) 式に代入すると，

$$\frac{Q}{n}\geq\left[\frac{P_1}{(n!)^{\beta}}\right]^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}} \tag{9}$$

または

$$Q\geq n\left[\frac{P_1}{(n!)^{\beta}}\right]^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}} \tag{10}$$

で表される。さらに，(10) 式の右辺に着目して，これを都市化の集積経済効果の関数として表示すると，

$$U=n\left[\frac{P_1}{(n!)^{\beta}}\right]^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}} \tag{11}$$

である。ここで，a_n は市場 n の比較優位性弾力性（すなわち n 番目の市場の生

7　ここでの集積の経済効果は，市場間の相互作用の積でありながらも，同ビル内か無視されるくらい近いところに，または単位 1 の距離に各市場の事業所があり，アクセスが良い都心部に多種多様な市場の管理機能が集積していることから生じる都市化の集積経済効果とみなされる。

8　なお，(5) 式の最右項の調和平均の意味については，神頭（2012，pp. 10-12）を参照せよ。

9　これについては，Krugman（1996，訳出，第 3 章）でジップの法則として説明されている。

産の労働量弾力性）を示していることから，$a_1+a_2+\cdots+a_n$ は系における各市場の比較優位性弾力性の合計（以後，「総比較優位性弾力性」と呼び，$A=a_1+a_2+\cdots+a_n$ で表す）を意味している。

したがって，$\frac{A}{n}$は「平均比較優位性弾力性」を示している。これを（11）式に当てはめると，

$$U=n\left[\frac{P_1}{(n!)^{\beta}}\right]^{\frac{A}{n}}=n\left[\frac{P_1}{(n!)^{\beta}}\right]^{\bar{A}} \tag{12}$$

で表される。

図 1 は，(12) 式に関して $P_1=1000$，$0.01\leq\bar{A}\leq1$，$2\leq n\leq20$，$\beta=0.99$ で描かれている。図 1 から平均比較優位性弾力性が大きくなるほど市場の数が少ないほど都市化の集積経済効果は急増することを示している。一方，平均比較優位弾力性がかなり小さいところでは，市場の数が大きいほど都市化の集積経済効果は大きいことを示している。

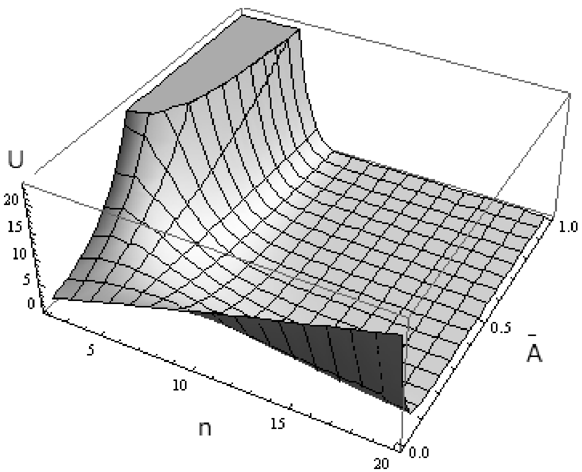

図 1

図 2 は，(12) 式に関して $P_1=1000$，$1\leq\bar{A}\leq2$，$2\leq n\leq20$，$\beta=0.99$ で描かれている。図 2 から市場の数が少なくなるにつれて，$\bar{A}$ に関わらず，都市化の集積経済効果は急増することを示している。

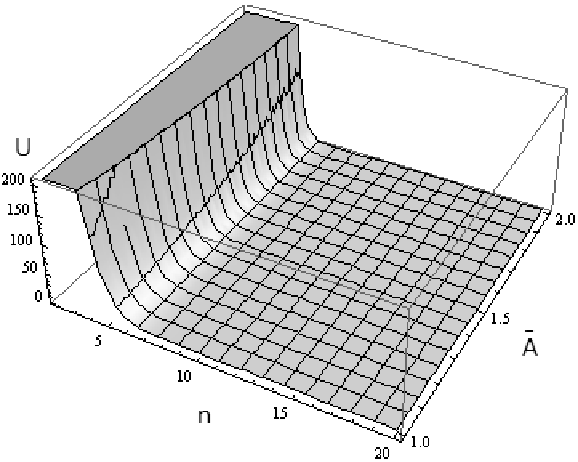

図 2

図 1 および図 2 から，平均比較優位性弾力性が相対的に大きい場合は，市場の数が少なくても都市化の集積経済効果は上昇することを示唆している。

図 3 には，(12) 式の中頃に関して U と A の関係が，0≤ A≤1，n＝20，β＝0.5，β＝1，β＝2 で描かれている。図 3 から各市場において労働の限界生産力

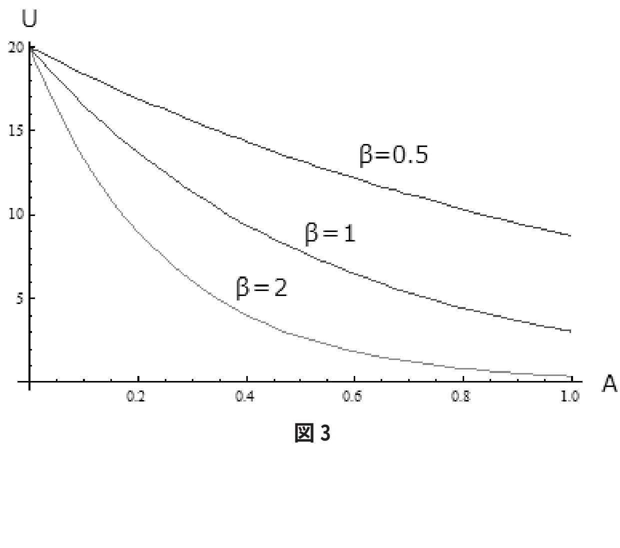

図 3

が逓減するケースにおいて，市場の数が一定であれば，市場の労働水準に格差がない（βが小さい）ほど都市化の集積の経済効果は相対的に大きい。一方，総比較優位性弾力性 A が小さいほど都市化の集積の経済効果は大きくなる。

ちなみに，各市場がすべてにおいて関連し合っている場合の都市化の集積経済効果 U は，

$$U={}_nC_m\left(P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_n^{\alpha_n}\right)^{\frac{m}{n}} \tag{13}$$

で表される[10]。また，(13) 式にランク・サイズモデルを応用すると，

$$\begin{aligned} U &= \frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\left(\frac{P_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{P_1}{2^{\beta}}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{P_1}{n^{\beta}}\right)^{\alpha_n}\right)^{\frac{m}{n}} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{1}{(n!)^{\beta}}\right)^{\frac{m}{n}} P_1^{\frac{m}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{1}{(n!)^{\beta}}\right)^{\frac{m}{n}} P_1^{\frac{m}{n}A} \end{aligned} \tag{14}$$

で表される。ここで，$m<n$ から $\frac{m}{n}<1$ であり，$0<A<1$ であれば $0<\frac{m}{n}A<1$ である。また，$n<mA$ であれば $1<\frac{m}{n}A$ である。

図 4 は，(14) 式に関して $P_1=100$， $\beta=0.99$，$n=20$，$2\leq m\leq 12$，$0\leq A\leq 2$ で描かれている。図 4 から総比較優位性弾力性 A が大きいほど，都市化の集積の経済効果はクラスターの数 m が相対的に多くなるところから増加する。またその効果が最大になるのはクラスターの数が 3 くらいのところである。

図 5 は，(14) 式に関して $P_1=100$，200，400 および $\beta=0.99$，$m=7$，$n=20$ で描かれている。図 5 から市場の数およびクラスターの数が一定ならば，最大の市場の労働水準が高いほど，総比較優位性弾力性が大きいほど，都市化の集積経済効果は上昇することを示している。

10　これについては，神頭（2012，pp. 2-6）を参照せよ。

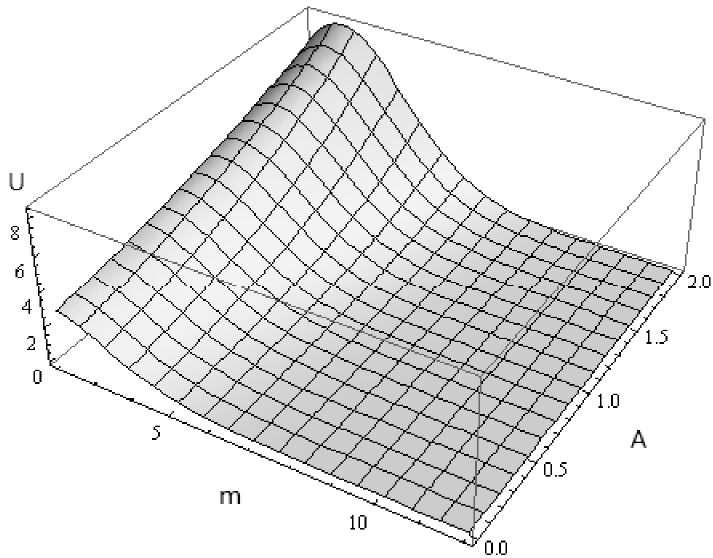
U
8
6
4
2
0
5
m
10
A
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0

図 4

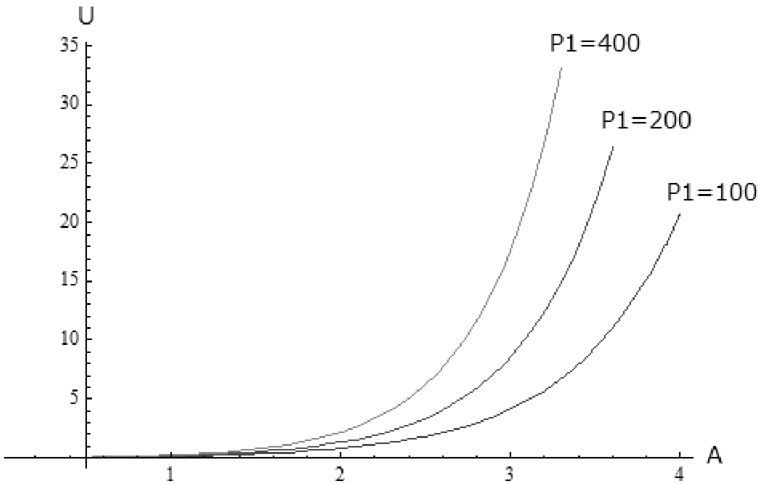
U
35
30
25
20
15
10
5
P1=400
P1=200
P1=100
1
2
3
4
A

図 5

2　市場の生産水準にランク・サイズの法則が成立しているケース

系の各市場の生産水準に関してランク・サイズの法則が成立しているとすると，市場 n の生産水準は，

$$P_n^{\alpha_n}=\frac{P_1^{\alpha_1}}{n^{\beta}} \tag{15}$$

で表される。ついで，(15) 式を (4) 式に代入すると，

$$\frac{Q}{n}\geq\frac{P_1^{\alpha_1}}{(n!)^{\frac{\beta}{n}}} \tag{16}$$

または

$$Q\geq n\frac{P_1^{\alpha_1}}{(n!)^{\frac{\beta}{n}}} \tag{17}$$

で表される。さらに，(17) 式の右辺に着目して，これを都市化の集積経済効果を関数として表示すると，

$$U=n\frac{P_1^{\alpha_1}}{(n!)^{\frac{\beta}{n}}} \tag{18}$$

で表される。

図 6 は，(18) 式に関して $P_1^{\alpha_1}=1000$，$0.5\leq\beta\leq1.5$，$2\leq n\leq20$ で描かれている。図 6 から市場の数が多いほど，かつ市場の生産力に格差がないほど，都市化の集積経済効果は大きい。また，市場の数が相対的に多い場合は市場の生産力の格差がなくなるほど都市化の集積経済効果は急増するが，市場の数が相対的に少ない場合は市場の生産力の格差がなくなるほど都市化の集積経済効果は逓増する傾向にある。このことは，自由主義国の市場競争が都市化の集積経済効果に大きく影響していることを示唆している。

ちなみに，市場がすべてにおいて関連し合っている場合の都市化の集積経済効果は，

$$U={}_nC_m(P_1^{a_1}P_2^{a_2}\cdots P_n^{a_n})^{\frac{m}{n}} \tag{19}$$

で表される[11]。(19) 式にランク・サイズモデルを応用すると，

11　これについては，神頭（2012a，pp. 2-6）を参照せよ。

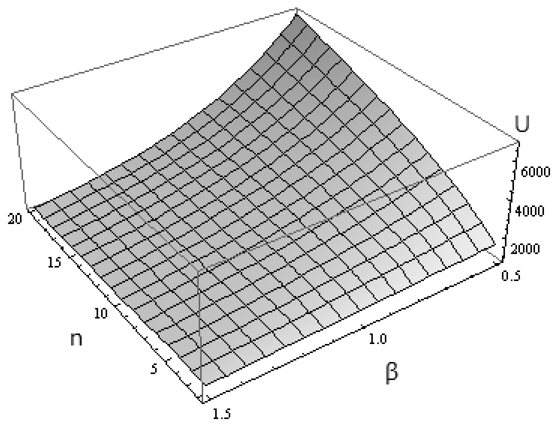

図 6

$$U=\frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{P_1^{\alpha_1}}{1}\frac{P_1^{\alpha_1}}{2^{\beta}}\cdots\frac{P_1^{\alpha_1}}{n^{\beta}}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{P_1^{n\alpha_1}}{(n!)^{\beta}}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{n!}{(n-m)!m!}\left(\frac{P_1^{\alpha_1}}{(n!)^{\frac{\beta}{n}}}\right)^{m} \tag{20}$$

で表される。図 7 は，(20) 式に関して $P_1=10$，$2\leq m\leq 12$，$n=20$，$\beta=0.99$ で描かれている。図 7 からクラスターの数は，市場の数 20 のほぼ半分から少し多いところで都市化の集積経済効果は最大化される。

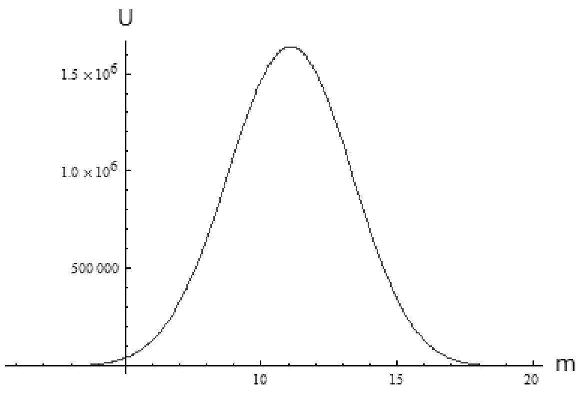

図 7

図7については，クラスター数が過剰になると，建物の数や高層化によって外部不経済効果が生じ，その結果都市化の集積経済効果が減少することを示唆しているように見える。

図8は，(20) 式に関して $P_1^{\alpha_1}=10$，$2 \leq m \leq 18$，$n=20$，$0.8 \leq \beta \leq 1.2$ で描かれている。図8から，クラスターの数は，市場生産の格差に関わらず市場の数のほぼ半分から少し多いところで都市化の集積経済効果は最大化されるが，市場の生産格差が小さいほど都市化の集積経済効果は高いところで達成される。

これについては，産業のクラスター化において，あまり進み過ぎても都市化の集積経済効果は最大化されないことを示唆している。

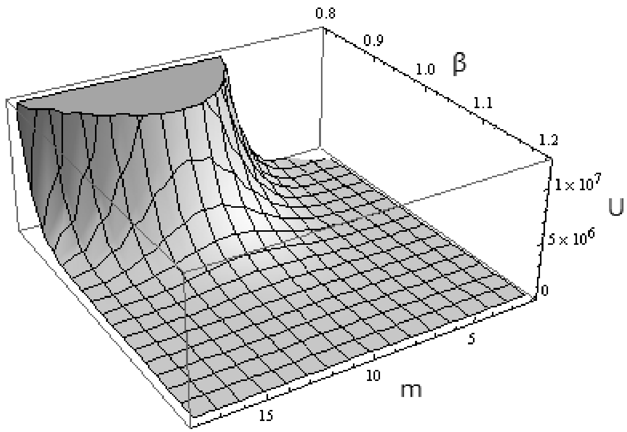

図8

さらに，労働生産水準にランク・サイズの法則が成立しているケースと市場の生産水準にランク・サイズモデルが成立しているケースが一致するのは，(12) 式と (18) 式から，

$$n\left[\frac{P_1^{\frac{A}{n}}}{(n!)^{\frac{\beta}{n}A}}\right]=n\frac{P_1^{\alpha_1}}{(n!)^{\frac{\gamma}{n}}} \tag{21}$$

が満たされるときである。したがって，(21) 式から労働の格差係数βと生産の格差係数γ（(18) 式ではβと表示）が同じであれば，(21) 式はA＝1で，かつ

$\alpha_1=\frac{1}{n}$のときに成立する。

これについては，系における秩序性が生産要素である労働と市場の生産に対して一致する場合は，最大市場の生産の比較優位性弾力性が市場の数の逆数であることを示唆している。

III　不等式の定理と都市化の集積経済効果の意味

ここでは，集積の経済効果に対して応用可能性のある不等式の定理について整理する。

(a) n個の正の数α_nに関して，

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=1 \quad \text{ならば} \quad \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\geq n \tag{1}$$

が成立する[12]。ただし，等号が成立するのは$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$のときである。

この場合は，比較優位性弾力性の積が1ならば，比較優位性弾力性の和は市場の数以上であることを示している。

(b) n個の正の数α_nに関して，

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=1 \quad \text{ならば} \quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\leq\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

が成立する[13]。ただし，等号が成立するのは$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$のときである。

この場合は，各市場の比較優位性弾力性の和が1（すなわち，各市場の限界生産力が逓減する場合）ならば，比較優位性弾力性の積は市場の数の逆数の市場の数のべき乗である。市場が加わるほど相互作用の最大値は減少していくことを示している。

(c) P_1，P_2，…，$P_n>0$のとき，相加相乗平均不等式から，

$$P_1^n+P_2^n+\cdots+P_n^n\geq nP_1P_2\cdots P_n \tag{3}$$

12　これについては，大関（2012，pp. 116-117）を参照せよ。

13　これについては，大関（2012，pp. 116-117）を参照せよ。

が成立する[14]。ただし，等号が成立するのは $P_1=P_2=\cdots=P_n$ の時である。

この場合は，各市場の比較優位性弾力性が市場の数に等しいとき，系における生産水準の幾何平均値は単純な相互作用を示している。

(d)　n≧2 のとき，

$$1+n\left(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right) \qquad (4)$$

が成立する[15]。この場合は，都市の格差係数 β が 1 のとき，(4)式が成立する。

(e)　$P_i>0$ に対して

$$\frac{P_1^2}{P_2}+\frac{P_2^2}{P_3}+\cdots+\frac{P_{n-1}^2}{P_n}+\frac{P_n^2}{P_1}\geq P_1+P_2+\cdots+P_n\geq n\sqrt[n]{P_1P_2\cdots P_n} \qquad (5)$$

が成立する[16]。この場合，系の総生産水準の最大と最小について，ランク・サイズモデルを(5)式に応用することによって(6)式が導かれ，これを用いてシミュレーションできる。

$$P_1\left(2^{\alpha}+\left(\frac{2^2}{3}\right)^{\alpha}+\cdots+\left(\frac{(n-1)^2}{n}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\alpha}\right)\geq P_1+P_2+\cdots+P_n\geq n\left(\frac{P_1^n}{(n!)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

(f)　巡回型不等式[17]

最も基本的な巡回型不等式は，

$$P_1^2+P_2^2+\cdots+P_n^2\geq P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n\geq(n-1)\sqrt[n-1]{P_1P_2^2P_3^2\cdots P_{n-1}^2P_n} \qquad (7)$$

である。また，(7)式の左辺に対して相加相乗不等式を応用すると，

$$P_1^2+P_2^2+\cdots+P_n^2\geq n\sqrt[n]{P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_{n-1}^2P_n^2} \qquad (8)$$

14　これについては，大関（2012，pp. 128）を参照せよ。

15　これについては，大関（2012，pp. 121-122）における例題 6.9 および例題 6.10 を参照せよ。

16　これについては，大関（2012，pp. 128）を参照せよ。

17　これについては，安藤（2012，第 2 章）を参照せよ。

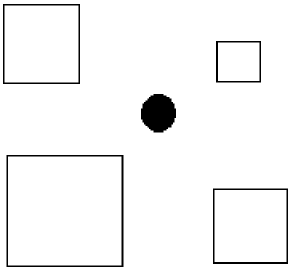

図 9－1

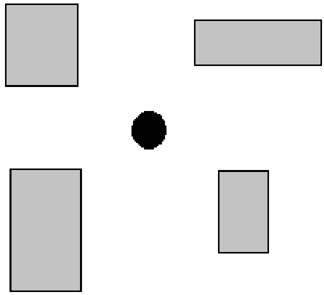

図 9－2

で表される。さらに（7）式の中項に P_nP_1 を加算して，それに相加相乗不等式を応用すると，

$$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n+P_nP_1\ge n\sqrt[n]{P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_{n-1}^2P_n^2} \tag{9}$$

で表される[18]。図 9－1 は（8）式の左辺（正方形）を，図 9－2 は（9）式の左辺（グレーの長方形）をイメージして描かれている。そこでの 4 つの市場の中にある●は丸とは限らないが，各式の右辺である同等の都市化の集積経済効果 $U=n\sqrt[n]{P_1^2P_2^2P_3^2\cdots P_{n-1}^2P_n^2}$ を示している。

ここで，（8）式にランク・サイズモデルを応用すると，

$$P_1^2\left(1+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\ge n\sqrt[n]{P_1^2\,\frac{P_1^2}{2^{2\alpha}}\cdots\frac{P_1^2}{n^{2\alpha}}}=n\left(\frac{P_1^{2n}}{(n!)^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{10}$$

が得られる。（10）式を簡単化すると，

$$1+\frac{1}{2^{2\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{2\alpha}}\ge\frac{n}{(n!)^{\frac{2\alpha}{n}}} \tag{11}$$

である。また，（9）式にランク・サイズモデルを応用すると，

$$P_1^2\left(\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\ge n\sqrt[n]{P_1^2\,\frac{P_1^2}{2^{2\alpha}}\cdots\frac{P_1^2}{n^{2\alpha}}}=n\left(\frac{P_1^{2n}}{(n!)^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{12}$$

が得られる。（12）式を簡単化すると，

18　これについては，大関（2012，pp. 134）を参照せよ。

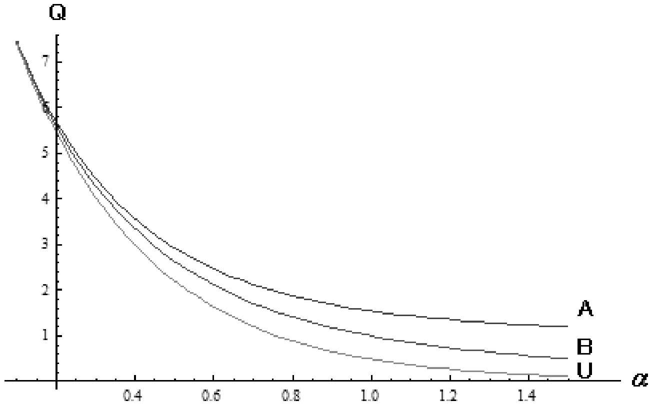

図 10

$$\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\geq\frac{n}{(n!)^{\frac{2\alpha}{n}}} \tag{13}$$

である。(11) 式および (13) 式は，最大の市場の生産水準が 1 で成り立つ不等式であることを示している。ただし，実際は P_1 は α を推計するのに必要である。

(11) 式および (13) 式のそれぞれ右辺である都市化の集積経済効果式が同じであることは興味深い。ちなみに，(10) 式の左辺は系における各市場の比較優位性弾力性が 2 である生産水準を合計したものである。(11) 式および (13) 式の左辺のそれぞれ A および B として，ともに同じ関数である右辺を U とすると，図 10 において当然ながら U≤B≤A という関係が見られ，等号が成立するのは α＝0 のときである。図 10 から系における市場の生産水準の格差係数 α が大きくなるほど都市化の集積経済効果と系における総生産水準の差が大きくなることを示している。図 10 は，n＝10，P^2＝1，0.1≤ α ≤1.5 で描かれている。

(g) n≥4 以上ならば (市場または市場としての産業が 4 以上の条件)，

$$(P_1+P_2+\cdots+P_n)^2\geq 4(P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n+P_nP_1) \tag{14}$$

が成立する[19]。これは，系の総生産の二乗は 2 対の市場の経済効果の合計の 4 倍

19　これについては，大関 (2012，pp. 136-137) を参照せよ。

よりも大きいことを示している。

(h) $\alpha+\beta=1$ のもとで，

$$K^{\alpha}L^{\beta} \leq \alpha K + \beta L \tag{15}$$

が成立する[20]。この左辺は収穫一定を示すコブ＝ダグラス型生産関数を示している。一方，右辺は完全代替型の CES 型生産関数を示している。ただし，αおよびβは係数を，K は資本，L は労働量をそれぞれ示す。(以下同様)

(i) $\alpha+\beta=1$ のもとで，

$$K_1^{\alpha}L_1^{\beta} + K_2^{\alpha}L_2^{\beta} \leq (K_1+K_2)^{\alpha}(L_1+L_2)^{\beta} \tag{16}$$

が成立する[21]。(16) 式から，資本と労働量を要素とするコブ＝ダグラス型生産関数を考慮して，2 つの企業を 1 つの都市に集中させることによる経済効果が大きいことを示している。例えば都市 1 と都市 2 による都市の合併[22]による経済効果が大きいことを示唆しているように見える。

(j) $0<\alpha<1$ のとき

$$P_1^{\alpha} \leq [\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2]P_2^{\alpha-1} \quad \text{または} \quad P_1^{\alpha}P_2^{1-\alpha} \leq [\alpha P_1 + (1-\alpha)P_2] \tag{17}$$

が成立する[23]。(17) 式から，弾力性係数と分配率がαとして等しい場合は，左辺のコブ＝ダグラス型生産関数の生産水準よりも右辺の CES 生産関数の生産水準の方が大きいことを示唆している。ちなみに，右辺のαは分配率（分配パラメータ）を［　］のべき乗は 1 であり，これは代替率（代替パラメータ）を示す[24]。

20　これについては，Hardy, G. H., Littlewood and G. Polya（1952，訳出 p. 47）を参照せよ。

21　これについては，Hardy, G. H., Littlewood and G. Polya（1952，訳出 pp. 47-49）を参照せよ。

22　これは，合併する都市の中心部に企業が集中することを指す。

23　これについては，Hardy, G. H., Littlewood and G. Polya（1952，訳出 pp. 49-50）を参照せよ。

24　これについては，Chiang and Wainwright（2005, p. 397）を参照せよ。

(k) 1＜βのとき，

$$(K_1L_1+K_2L_2+\cdots+K_nL_n)^{\beta} \leq K_1L_1^{\beta}+K_2L_2^{\beta}+\cdots+K_nL_n^{\beta} \tag{18}$$

が成立する[25]。(18) 式から，左辺の系における資本と労働の各弾力性が1の生産関数を有する各産業の生産から成る総生産に対して比較優位性が作用するよりも右辺の各産業の労働に対して比較優位性が作用する方が系における総生産性が高いことを示している。ただし，ここでのβは生産の地域性に依拠する労働力を反映した比較優位性弾力性を示している。

Ⅳ　都市化の集積経済効果の存在

一般に多くの市場が存在する国に見られるように，国の総生産水準から最大の市場の生産水準を差し引いた値は，その最大市場の生産水準を上回っていること[26]を仮定しよう。これは，生産水準において最大の市場以外にも第2の市場が相対的に大きいか，あるいはそれを含む以下のランクの市場の合計が大きいかを示していることから，この仮定が市場規模の格差に関わってくる。

まず，国の総生産水準は各市場の生産水準の合計であることから，

$$Q=P_1+P_2+\cdots+P_n \tag{1}$$

で表される。上記の仮定にもとづいて (1) 式から，

$$Q-P_1=P_1+P_2+\cdots+P_n-P_1 \geq P_1 \tag{2}$$

を意味する。それゆえ (2) 式から，

$$\frac{P_1+P_2+\cdots+P_n}{2} \geq P_1 \tag{3}$$

が成り立つ[27]。ただし，Qは系の総生産水準を，P_1は最大市場の生産水準を，P_nは市場nの生産水準を，nは市場の数をそれぞれ示す。

25　これについては，渡辺 (1969，p. 54) を参照せよ。

26　この仮定は，わが国に当てはまっている。これについては神頭 (2012b，付録2) を参照せよ。

27　市場を都市に置き換えて，線形の立地を考えると，中位立地の原理から都市の立地点に関わらずこの不等式が成立する。

また，相加相乗平均不等式を（1）式および（2）式へ応用すると，

$$Q \geq n\sqrt[n]{P_1 P_2 \cdots P_n} \quad (4) \qquad \text{および} \qquad Q \geq 2P_1 \quad (5)$$

で表される。ここで，第1ランクの市場の生産が全体の生産の半分を占めている場合の都市化の集積の経済効果は，（4）式および（5）式から，

$$Q = 2P_1 = n\sqrt[n]{P_1 P_2 \cdots P_n} \quad (6)$$

で表される。この条件のもとで P_1 は（6）式から，

$$P_1 = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} (P_2 P_3 \cdots P_n)^{\frac{n}{n-1}} \quad (7)$$

で表される。さらに，（7）式を

$$P_1 = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} M^{\frac{n}{n-1}} \quad (8)$$

として，図11では $M=5000$，$M=10000$，$2 \leq n \leq 100$ の範囲で描かれている。ただし，$M = P_2 P_3 \cdots P_n$ を示す。

最大の市場の生産水準は，市場の数が10くらいのところで低くなるが，そこから市場が増えるにつれて高くなる。また，最大の市場の生産水準は，その最大の市場を除く市場の相互作用が強いほど高い。

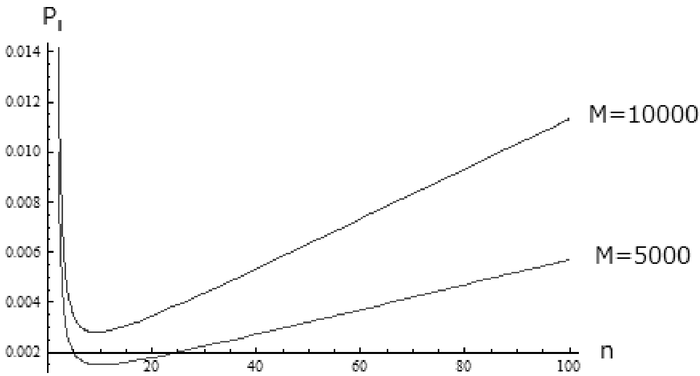

図11

ちなみに，経済発展段階における国別の都市化の集積経済効果については，以下の3つのケースに分けられる。

(1) $Q \geq 2P_1$であれば先進国で，都市化の集積の経済効果が存在する[28]。

(2) $Q < 2P_1$であれば後進国で，都市化の集積の経済効果が存在しない[29]。

この2つのケースにおいて国家の市場または産業の格差が，どの範囲において先進国であるか，後進国であるかを考察する。

ここで（5）式にランク・サイズモデルを応用すると，

$$P_1\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \geq 2P_1 \tag{9}$$

から，

$$\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right) \geq 2 \tag{10}$$

で表される。(10) 式が成立するのは，先進国の都心部で都市化の集積経済効果が存在する場合，多種多様な産業構造のもとでこの条件が満たされていることになる。ちなみに，(10) 式から産業が無数に存在する場合はリーマンのゼータ関

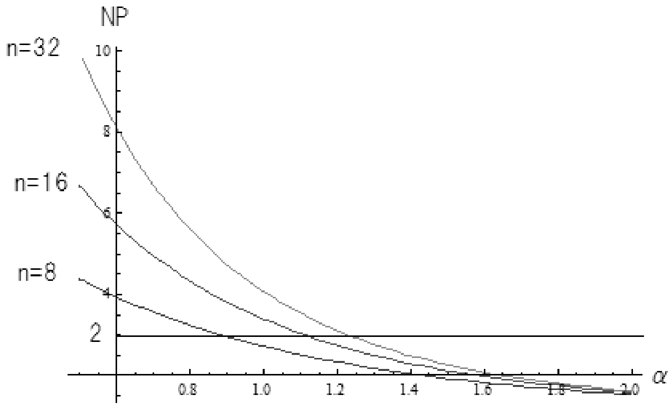

図 12

28　日本のケースについては，神頭（2012b，付録 2）を参照せよ。

29　この場合であっても，地域特化の経済効果は存在する場合があることに注意を要する。

数を計算すると$\alpha=1.72$のとき，(10) 式の右辺は2.016になる[30]。したがって，(10) 式を満たすαは，ほぼ$0<\alpha\leq 1.72$の範囲にあることが推測される。

図12には，(10) 式の右辺を$NP=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}$として産業の数であるnを8，16，32で，$0.1\leq\alpha\leq 2$の範囲で描かれている。

図12から，産業の数が多いほど，格差が小さいほど都市化の集積経済効果が大きいことが分かる。

V　都市化の集積経済が創出される都市

都市化の集積の経済が発生する都市またはそれが最大と成りうる都市は，すべての都市の総交通費を最小とする都市である可能性を有している。なぜならば，地代や建設費用が一定ならば交渉に要する移動費用や輸送費用が最小になる都市に企業が集中するからである。このことを踏まえ，中位立地の原理にもとづいて総交通費を最小にする都市の立地点を考える。

一般に，都市経済学の分野において中位（メディアン）立地の原理[31]が説明されている。一方ORの分野ではHakimi（1964）によって「需要の中位点で総輸送費が最小になる」ことが証明されている（ハキミの定理)。

ここでは，上記の原理および定理にもとづいて線形上に人口が異なるいくつかの都市が立地している場合の総交通費（製造業であれば総輸送費）を最小にする都市はどこか，という問題に触れよう。

最大都市の人口から順次に都市人口が累積していくとすると，

$$G_n=g_1+g_2+\cdots+g_n \tag{1}$$

で表される。ただし，G_nはn番目の都市までの総累積人口を，g_nはn番目の都市までの累積人口を示す。なお$g_1=P_1$，$g_2=P_1+P_2$，$g_n=P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n$で

30　この値は，http://keisan.casio.jp にて計算されている。

31　これについては，McDonald（1997，pp. 32-34）で説明されている。また，この原理に関する単純な数学的説明はNahin（2004，訳出（上)，pp. 6-7）によってなされている。

あり，P_n は n 番目の都市人口を示している。

また，中位立地点となる条件は，都市の総人口が半分のところであるゆえ，

$$M=\frac{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n}{2}=\frac{g_n}{2} \tag{2}$$

である。したがって，交通費用を最小にする立地点 k^* は，

$$k^*=\min\left\{k : g_1+g_2+\cdots+g_k=\frac{1}{2}g_n\right\} \tag{3}$$

で表示される。さらに，都市の人口にランク・サイズの法則が成立しているとすると，ここでのランク・サイズモデルは，

$$P_n=\frac{P_1}{n^{\alpha}} \tag{4}$$

で表される。この（4）式を（3）式に当てはめると，

$$k^*=\min\left\{k : 1+\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}\right)+\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{k^{\alpha}}\right)\right.$$

$$\left.=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right\} \tag{5}$$

で表示される。ただし，$k<n$ である。

ここで，（4）式の累積関数 A_n は，

$$A_n=\int_1^k\frac{P_1}{n^{\alpha}}dn=\left[\frac{1}{1-\alpha}P_1n^{1-\alpha}\right]_1^k=\frac{P_1}{1-\alpha}(k^{1-\alpha}-1) \tag{6}$$

で表される。また（4）式をあてはめた（2）式を連続関数で表すと，

$$\frac{1}{2}\int_1^n\frac{P_1}{n^{\alpha}}dn=\frac{P_1}{2}\left[\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n=\frac{P_1}{2(1-\alpha)}(n^{1-\alpha}-1) \tag{7}$$

である。（6）式と（7）式から，

$$\frac{P_1}{1-\alpha}(k^{1-\alpha}-1)=\frac{P_1}{2(1-\alpha)}(n^{1-\alpha}-1) \tag{8}$$

が成立する必要がある。（8）式から，

$$k=\left[\frac{1}{2}(n^{1-\alpha}+1)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{9}$$

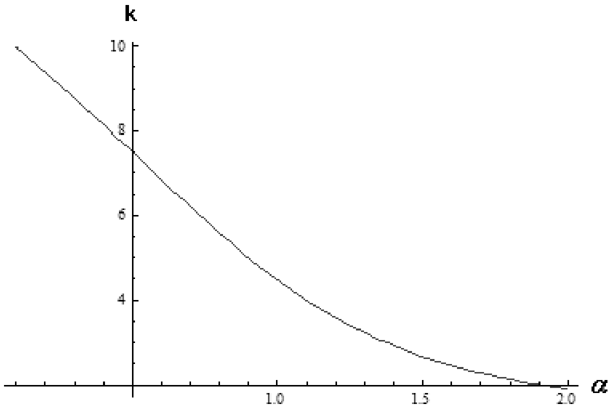

図 13

が得られる。(9) 式を用いて，都市が 20 あるケースで，都市の人口格差によって，総交通費を最小にする都市がシミュレーションされる。ただし，$0.1 \leq \alpha \leq 2$ で描かれているが，$\alpha = 1$ における k は存在しないことに注意を要する。図 13 から，都市の規模格差が小さいほど総交通費を最小にする都市のランクが高くなる（人口規模が小さくなる）ことを示唆している。

ところで，以上の積分近似は $0 < \alpha < 1$ のもとで，n，k がかなり大きい時に精度が高くなる。(8) 式の両辺を $n^{1-\alpha}$ で割ると，

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \tag{10}$$

である。今 n，k が十分大きいとすると，

$$\left(\frac{k}{n}\right)^{1-\alpha} \to \frac{1}{2} \tag{11}$$

すなわち

$$x^{*}(\alpha) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{k}{n}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{12}$$

を得る。(12) 式から，α が 0 に近づくと $x^{*}(\alpha)$ は $\frac{1}{2}$ に近づき，α が 1 に近づ

くと $x^*(\alpha)$ は 0 に近づく。このことは，都市規模に格差がほとんどない場合は都市の数のほぼ真ん中のランクの都市が総交通費を最小にする都市であり，都市規模に格差があるほど最大規模であるランク 1 の都市に比較的近いランクの都市が総交通費を最小にする都市に成りうることを示唆している。

今後，(9) 式に系（例えば，都市圏）における都市の数およびランク・サイズモデルから推計される都市規模格差係数をあてはめることによって，総交通費を最小にする直線上の都市のランクが分かる。どの業種の企業であっても交渉のための総移動費や製品を輸送するための総交通費を最小にする都市に事業所を立地するメリットがある。それゆえ，そこには多種多様な産業に属する多くの企業が集中的に立地することによってもたらされる都市化の集積経済が生まれる。

Ⅵ　おわりに

本論では，まず神頭（2012b）のモデルの修正を行い，系におけるすべての市場に存在する企業が face-to-face の商談のための費用を節約するために本社機能を都心部に立地すること，また，ここでの企業の商談は一種の相互作用であり，これは企業数または市場のクラスターに比例していることからこの相互作用を都市化の経済効果として，市場における労働生産水準にランク・サイズの法則が成立しているケースと市場の生産水準にランク・サイズの法則が成立しているケースに分けてシミュレーション分析を試みた。その結果，前者では平均比較優位性弾力性が大きくなるほど市場の数が少ないほど都市化の集積経済効果は急増して，それがかなり小さいところでは，市場の数が大きいほど都市化の集積経済効果は大きいこと，また市場の数が一定であれば，市場の労働水準に格差がないほど都市化の集積の経済効果は相対的に大きいこと，さらに総比較優位性弾力性が小さいほど都市化の集積の経済効果は大きくなることなどが分かった。一方，後者では市場の数が多いほど，かつ市場の生産力に格差がないほど都市化の集積経済効果は大きいこと，また市場の数が相対的に多い場合は市場の生産力の格差がなくなるほど都市化の集積経済効果は急増すること，翻って市場の数が相対的に少ない場合は市場の生産力の格差がなくなるほど都市化の集積経済効果は逓増すること，さらにクラスターの数は市場の生産水準の格差に関わらず市場の数のほぼ半

分から少し多いところで都市化の集積経済効果は最大化され，市場の生産格差が小さいほど都市化の集積経済効果は高いところで達成されることなどが分かった。ついで数学における不等式の定理に幾何平均およびランク・サイズモデルおよび市場の生産関数などを応用することで，都市化の集積経済効果の範囲をシミュレーションできることを説明した。さらに国の総生産水準から最大の市場の生産水準を差し引いた値は，その最大市場の生産水準を上回っていることの仮定のもとで，経済発展段階における国別の都市化の集積経済効果についての存在可能性について提示した。最後に系または都市圏における線形上の都市において中位立地の原理およびランク・サイズモデルを応用することによって，最大都市規模が分からなくても都市の数および都市規模格差係数が推計されると，総交通費を最小にする都市のランクが分かることを示した。

今後は，ここで構築されたモデルにもとづいて実証的な研究へと発展させることが課題として残される。

参考文献

Chiang, A. C. and K. Wainwright (2005) Fundamental Methods of Mathematical Economics, 4ed., McGraw-Hills.

Duranton, G. and D. Puga (2004) Micro-foundation of Urban Agglomeration Economies, Chapter 48 in Handbook of Regional and UrbanEconimics 4: Cities and Geography, eds. Vernon Henderson and Jacques-Francois Thisse. Amsterdam: Elsevier.

Hakimi, S, L. (1964) Optimum Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Median of a Graph, Operations Research 12, pp. 450-459.

Hardy, G. H., Littlewood and G. Polya (1952) Inequality, Cambridge University Press（邦訳 - 細川尋史『不等式』シュプリンガー・ジャパン，丸善出版，第 2 版，2012 年）

Henderson, J. V. (1988) Urban Development, Oxford University Press.

Hoover, E. M. (1937) Location Theory and the Shoe and Leather Industries, Harvard University Press（邦訳 - 西岡久雄『経済立地論』大明堂，1968 年）

O'Sullivan, A. (2012) Urban Economics, 8ed. McGraw-Hill.

Isard, W. (1956) Location and Space-Economy, The M.I.T. Press（監訳 - 木内信蔵『立地と空間経済』朝倉書店，1964）

Krugman, P. (1995) Development, Geography and Economic Theory, The MIT Press (邦訳 - 高中公男『経済発展と産業立地の理論』文眞堂，1999 年)
Krugman, P. (1996) The Self-Organization Economy, Blackwell（邦訳 - 北村行伸・妹尾美起『自己組織化の経済学』1999 年，東洋経済新報社)
McDonald, J. F. (1997) Fundamentals of Urban Economics, Prentice-Hall.
Nahin, P. J. (2004) When Least is Best, Princeton University Press（邦訳 - 細川尋史『最大値と最小値の数学（上)，(下)』シュプリンガー・ジャパン，2010 年
Stuart, R. and W. Strange (2006) The Micro-Empilics of Agglomeration, Chapter 1 in A Comparison to Urban Economics, eds. Arnot, R. and D. McMillen, Blackwell.
Weber, A. (1909) Uber den Standort der Industrien, Erste Teil, Tubingen（邦訳 - 篠原泰三『工業立地論』大明堂，1986 年)
安藤哲哉『不等式―21 世紀の代数的不等式論―』数学書房，2012 年
神頭広好『都市の形成，市場および集積の経済』経営総合科学研究所叢書 38，愛知大学経営総合科学研究所，2012a 年，2 月
神頭広好「系における市場と都市化の集積経済効果」経営総合科学，第 98 号，2012b 年，9 月
大関清太『数学のかんどころ 9　不等式』共立出版，2012 年
渡辺隆一『不等式入門』森北出版，1969 年

第Ⅱ部　ランクと空間の尺度

Abstract: The measure ofrank and space

Firstwe derive the method of estimating the distance from the rankby using the rank-size model and the gravity model of Newton. Second we attemptsimulation analysis for rail passengers from CBD in a metropolitan areaby applying the estimated distance to the amplitude function derived from the signal function of the AM broadcast based on trigonometric functions. Third we denote the location aspect of a station from city formation and arrangement using the theory of a Latin square and the law of rank-size. Fourth we find that the town located between two big cities disappears gradually according to the attraction of two big cities by use of a catenary function.

Keywords: rank-size model, gravity model, signal function, latin square, catenary function

Ⅰ　はじめに

物理学の分野において，重力モデルは宇宙を対象とした実験でニュートンやアインシュタインの理論の中で展開されている。重力モデルが地域に応用されたのは 20 世紀半ばころの地理学の分野であり，重力モデルは Reilly（1931）の商圏境界モデル，Huff（1964）の商圏モデルおよび Lakshmanan and Hansen (1965) に代表される商圏分析などに応用された。これらのモデルは主に Carrothers（1956）および Davies（1976，pp. 11-46）によって整理されており，地域科学の創始者である Isard（1956）によって重力モデルの地域への応用可能性が指摘されている。また，Willson（1969）は発着地などを制約においた重力モデルを開発しており，それは空間的相互作用モデルと呼ばれている。一方，ランク・サイズモデルは Zipf の法則をベースにしており，そのモデルを Zipf

(1946) 自らアメリカ合衆国の都市における移動人口に応用している。現在に至っても地域研究者および一部の物理学者[1]などによって都市人口の格差などを調べるためにランク・サイズの法則が国や都市圏の都市に応用されている。ちなみに，確率論的観点から Simon（1955）は都市の規模分布はべき乗則に従っていることを論じている。このように地理学および物理学と融合された研究は，20 世紀中ごろ活発に行われていたことが分かる[2]。これらの研究の一部は複雑性との関係で都市の自己組織化[3]の観点から国際経済学者の Krugman（1996）によって取り上げられている。21 世紀に入ると，地理や地域関連の分野においては理論というよりも GIS を用いた論文が比較的多く見られる。最近では重力モデルおよびそれを包括する空間的相互作用モデルに関するこれまでの主たる研究成果が，Wilson（2012）によって編集されている[4]。

本論では，ランク・サイズモデルのランクは順序を示す整数であり，距離は一般に正の自然数で示される。そこで，なんとかランクと距離の関係を示すことができないかと考え，「ランクが抵抗となる引力」と「距離が抵抗となる引力」とが近似しているという観点からランクと地理的距離との関係を導く。さらに，三角関数から導かれる放送局の信号関数を鉄道に応用することによって，大都市圏における鉄道駅の規模と距離に関するシミュレーション分析を試みる。また，ラテン方陣（または方格）の理論とランク・サイズの法則を用いて都市の形成・配置から駅の立地様相を示す。最後に，電線のたるみを調整するのに用いられているカテナリー関数を都市空間に応用して 2 つの大都市間の中央に立地する町が各大都市の引力によって辿る盛衰傾向を見る。

1　例えば，Buchanan（2000，訳出 pp. 259-264）において Zanette and Manrubia (1997) のべき乗則に関する実証的研究にもとづいて都市の仕組みを説明している。

2　例えば，Racorean（2009）において全 chapter を通じて 1960 年前後の文献が比較的多く見られる。

3　これに関するモデルの多くは，Prigogine and Stengers（1984）および Kauffman (1995) によって説明されている。

4　この編著は，Urban Modelling-Critical Concepts in UrbanStudies-, vol. I, II, III, IV, V, Routledge である。

II　ランクと空間距離

ここでは，地域科学の観点から，対象を都市にして，ランク・サイズモデルと引力モデル（または重力モデル）を融合することによってランクと距離の関係を考える[5]。

ランク・サイズモデルは基本的にはジップの法則が淵源であるが，一般に

$$P_n = \frac{P_1}{n^{\alpha}} \tag{1}$$

で表される。ただし，P_1 は最大の人口を有するランク 1 の都市，P_n は n 番目の人口を有するランク n 都市，n はランク，α は都市人口の格差を示す係数である。

つぎに（1）式に P_n を乗じることによって，

$$P_n^2 = \frac{P_1 P_n}{n^{\alpha}} \tag{2}$$

が導かれる。(2) 式の左辺はランクを抵抗とする引力を表しており，これは n 番目の都市の規模の二乗を示している。したがって，最大の人口を有するランク 1 都市と n 番目の人口を有するランク n 都市との引力は n 都市の人口の二乗で表される。これはランク・サイズモデルから導かれた一種の引力モデル（以後，これを「ランク引力モデル」と呼ぼう）である。また，ニュートンの引力の法則[6]にもとづく地域科学に応用される引力モデルは，

$$F_{1n} = G\,\frac{P_1 P_n}{d_{1n}^{\beta}} \tag{3}$$

で表される。ただし，d_{1n} はランク 1 都市とからランク n 都市までの距離を，G は物理学では万有引力をそれぞれ示している。(2) 式と区別する上で，ここでは

5　ここで対象となる空間は，大都市圏内の都市とか政治や経済によって影響されている範囲が限定されている空間である。なお，村や町を含めた都市の数が限りなく無限に近いという前提でゼータ関数を用いたものに神頭（2011, pp. 23-25 および 2012a, pp. 31-39）がある。

6　これについては，本論の付録を参照せよ。

(3) 式を「距離引力モデル」と呼ぶ。

ところで，(2) 式を (3) 式で除すると，

$$\frac{P_n^2}{F_{1n}}=\frac{d_{1n}^{\beta}}{Gn^{\alpha}} \tag{4}$$

が得られる。また (4) 式を対数に変換してから整理すると，

$$\log F_{1n}=\log G+\log P_n^2-\beta\log d_{1n}+\alpha\log n \tag{5}$$

が得られる。(5) 式から，距離引力は相対的にランク n 都市の人口が大きく，交通の抵抗が少なく，ランク 1 都市からの距離は短く，ランクが大きい (または都市の数が多い) ほど強いことを示唆している。

さらに，ランクから距離を推計するために近似的にランク引力と距離引力が等しい[7]とすると，(4) 式から，

$$d_{1n}^{\beta}=Gn^{\alpha} \tag{6}$$

または

$$d_{1n}=(Gn^{\alpha})^{\frac{1}{\beta}} \tag{7}$$

で表される。

この場合，$d_{11}=G^{\frac{1}{\beta}}$ から $G=d_{11}^{\beta}$ である。これを (6) 式へ代入すると，

$$d_{1n}=d_{11}n^{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{8}$$

である。ただし，d_{11} はランク 1 都市の距離を示している。

(8) 式から，つぎの 3 つのケースに分けられる。

(1) $\alpha>\beta$ ならばランクが上がるごとに距離が急増

(2) $\alpha=\beta$ ならばランクと距離が比例

(3) $\alpha<\beta$ ならばランクが上がるごとに距離が逓増

図 1 は (8) 式を用いて，$d_{11}=1$，$m=\frac{\alpha}{\beta}$，$1\leq n\leq 20$ の範囲で描かれている。

7　これについては，ランク引力モデルを中心地モデルとしても，距離引力モデルは必ずしも中心地モデルとは限らないことに注意を要する。代表的中心地モデルとしては，農業立地モデルの Thünen (1826)，都市立地モデルの Christaller (1933)，経済立地の Lösch (1940)，付け値地代の Alonso (1964)，都市階層モデルの Beckmann (1959) などがある。これらのモデルは，神頭 (2009) に掲載されている。

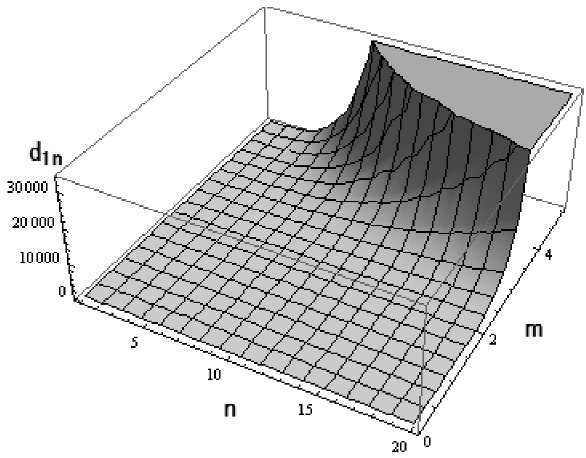

図 1

この図から都市の数が多く，相対的にβよりもαが大きい場合は，ランク 1 都市からの距離が急に大きくなることを示唆している。

ここで，引力モデルにおいて，一般に物理学のみならず商圏を推計する場合，距離の抵抗としてβ＝2 が用いられていることから[8]，これを（6）式に代入すると，

$$d_{1n}=n^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (9)$$

で表される。(9) 式から，つぎの 3 つのケースに分けられる。

(1) α＞2 ならばランクが上がるごとに距離が急増

(2) α＝2 ならばランクと距離が比例

(3) α＜2 ならばランクが上がるごとに距離が逓増

ちなみに，社会科学においてランク・サイズモデルの推計値において，α＜2 であることから，ランクが上がるごとに逓増することが推察される。また，わが

8　例えば，経済地理学の分野におけるライリー＝コンバースモデルやハフの確立モデルで採用されている。

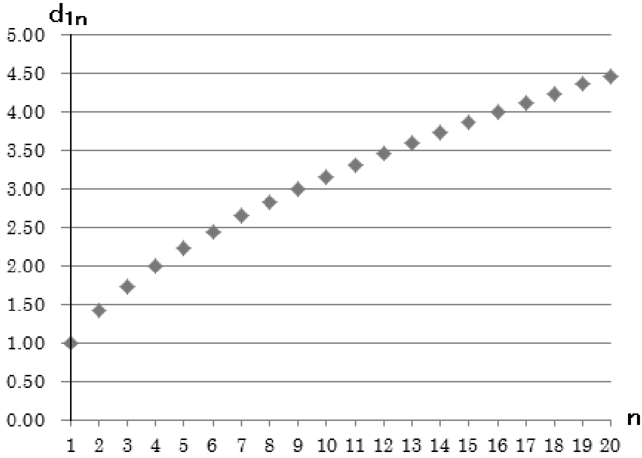

図 2

国の都市人口や施設などの立地数にランク・サイズモデル応用すると，ほぼαが1に近いことから，(9) 式に$\alpha=1$を代入すると，

$$d_{1n}=n^{0.5} \tag{10}$$

である。したがって，ランク引力＝距離引力のもとで，ランクを距離の概念に置き換えることができる。図 2 は，(10) 式に関して $1\leq n\leq 20$ の範囲で描かれている。

＜ランクと距離を推計するための補足＞

上記では，$n=d_{11}=1$ が前提となるために，d_{11} を決めたうえでランク引力と距離引力の相対的大きさを導く必要がある。

ここで，実際の距離 d_{1n} とランク n とが比例しているとすると，$d_{1n}=d_{11}n$ で表されることから，これを (4) 式へ代入すると，ただし，d_{11} は 1 単位以上である。

$$\frac{P_n^2}{F_{1n}}=\frac{d_{1n}^{\beta}}{Gn^{\alpha}}=\frac{(d_{11}n)^{\beta}}{Gn^{\alpha}}=G^{-1}d_{11}^{\beta}n^{\beta-\alpha} \tag{11}$$

である。また (11) 式を対数変換すると，

$$\log \frac{P_n^2}{F_{1n}} = -\log G + \beta \log d_{11} + (\beta - \alpha) \log n \tag{12}$$

が得られる。(12) 式を解釈すると，β＜αでかつαがかなり高い場合は距離引力＜ランク引力が成立するが，β≧αの場合は距離引力＞ランク引力が成立する。

さらに (12) 式から，

$$\log F_{1n} = \log P_n^2 + \log G - \beta \log d_{11} - (\beta - \alpha) \log n \tag{13}$$

である。(13) 式から，ランク n の都市が相対的に大きく，ランク 1 都市の距離が相対的に小さく，都市圏における距離の抵抗が相対的に小さく，都市の規模に格差があり，都市の数 n が相対的に多い場合，ランク 1 都市とランク n 都市の距離引力は大きいことを示唆している。

なお，引力モデルの係数は一般に物理学ではβ＝2 とされていることから，これを (13) 式に代入すると，

$$\log \frac{P_n^2}{F_{1n}} = -\log G - 2 \log d_{11} + (\alpha - 2) \log n \tag{14}$$

である。また，(14) 式から対数の距離引力は，

$$\log F_{1n} = \log P_n^2 + \log G - 2 \log d_{11} - (\alpha - 2) \log n \tag{15}$$

で表される。ここで， (15) 式へα＝1 を代入すると，

$$\log F_{1n} = \log P_n^2 + \log G - 2 \log d_{11} + \log n \tag{16}$$

で表される。(16) 式に n 番目の都市人口とランク 1 都市の距離と都市の数でもあるランク n を代入することによって，距離引力が求められる。ただし，この引力は G=1 とした場合の系における相対的な距離引力である。

さらに，距離の関数を指数タイプの

$$d_{1n} = d_{11} e^{(n-1)} \tag{17}$$

で表されるとすると，(17) 式を (4) 式に代入すると，

$$\frac{P_n^2}{F_{1n}} = \frac{d_{1n}^{\beta}}{Gn^{\alpha}} = \frac{(d_{11} e^{(n-1)})^{\beta}}{Gn^{\alpha}} = G^{-1} d_{11}^{\beta} n^{-\alpha} e^{\beta(n-1)} \tag{18}$$

で表される。図 3 では (18) 式を，G=1，d_{11}=1，α＝1 として描かれている。図 3 から「ランク引力」対「距離引力」は，都心から離れるほど，距離の抵抗係数が増えるほど大きくなることが分かる。

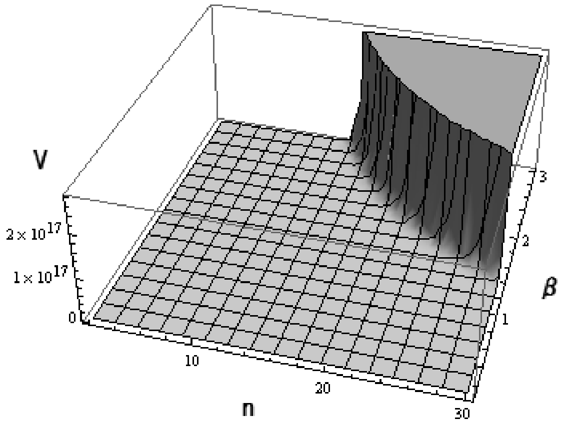

図 3

さらに（18）式を対数変換すると，

$$\log\frac{P_n^2}{F_{1n}}=-\log G+\beta\log d_{11}-\alpha\log n+\beta(n-1) \tag{19}$$

が得られる。ここで（19）式を整理すると，

$$\log F_{1n}=\log P_n^2+\log G-\beta\log d_{11}+\alpha\log n-\beta(n-1) \tag{20}$$

である。(20) 式から，ランク 1 都市の距離が相対的に大きく，都市圏における距離の抵抗が相対的に大きい場合は，ランク 1 都市とランク n 都市の引力は相対的に小さいことを示唆している。

(20) 式において G=1 として，ランク 1 都市の距離，$\alpha=1$ および $\beta=2$ を代入することによって，相対的ではあるが，都市 1 と都市 n の距離引力が推計される。

また（20）式から，

$$\log P_n^2=\log F_{1n}-\log G-\alpha\log n+\beta(\log d_{11}+(n-1)) \tag{21}$$

である。(21) 式に最小二乗法を適用することによって，α および β が推計される。

III　信号関数と鉄道

三角関数は，自己組織化の観点からリズムを生み出す関数としては便利な関数である[9]。放送局の信号の関数は三角関数を用いて構築されることができ，AM 放送の信号関数は，

$$F=\{A+m(n)\}\sin 2\pi fn \tag{22}$$

で表される。ただし，振幅は A＋m(n) を，f は放送局から発生される周波数をそれぞれ示している。また，A は一定の振幅であるが，時間 n の変数である変調信号 m(n) によって番組の情報が運ばれている。番組の情報を含んでいる $m(n)\sin 2\pi fn$ は搬送波と呼ばれている。さらに，AM 放送の振幅関数は sin(n) からなる関数である。この性質を応用して，ここでは AM の信号関数は，

$$F=(A+P(n)\sin Bn)\sin 2\pi fn \tag{23}$$

で表される[10]。ただし，振幅は $A+P(n)\sin Bn$ を，f は放送局から発生される周波数をそれぞれ示している。ただし，時間 n の変数である変調信号 $P(n)\sin n$ によって番組の情報が運ばれている。また番組の情報を含んでいる $P(n)\sin Bn \sin 2\pi fn$ は搬送波である。

つぎに（23）式から振幅と距離との関係は，

$$V_n=A+P(n)\sin Bn \tag{24}$$

である。

ここで都心部からプル（pull）とプッシュ（push）の力関係[11]が通勤，通学者を介して周辺へリズムをもたらしているとすれば，それは駅を介して起こる現象であると考えられる。そこで（24）式を鉄道に応用しよう。

まず，つぎの諸仮定が設定される。

9　これについては，都甲・江崎・林・上田・西澤（2009，pp. 47-51）を参照せよ。

10　信号関数としての AM および FM の各関数については，山根（2008，p. 94）で簡単に説明されている。ここでは，シンプルな振幅関数を有する AM 信号関数を採用した。

11　都心部におけるプルは都心部のアメニティによる正の効果をプッシュは高額な地代や騒音などの負の効果を示しており，この 2 つの力関係を意味している。

(1) 駅間には乗降客を通じてプルとプッシュの力が作用しており，各駅の乗降客数においては都心から循環的な様相を呈している。これは１つの鉄道において同じ集積度[12]を有する隣り合う駅は存在しないことを意味する。
(2) 駅の乗降客数はランク・サイズの法則に従っている。
(3) 都心からの距離は，駅の数であるランクに比例的である。ここでの距離は本論Ⅱ（ランクと空間距離）で導かれた方法を用いる。

上記の仮定にもとづいて，秩序性を有するランク・サイズモデルは，

$$P_n=\frac{P_1}{n^{\alpha}} \tag{25}$$

で表される。ただし，P_1 は都心部（都心ターミナル）の乗降客数[13]を，P_n は n 番目の駅の乗降客数を，n は駅のランクを，α は駅の乗降客数の格差係数をそれぞれ示す。

ついで（25）式を（24）式へ代入すると，プループッシュが作用している場合の n 番目の駅の乗降客数は，

$$V_n=A+\frac{P_1}{n^{\alpha}}\sin Bn^{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{26}$$

で表される。ただし，V_n は n 番目の駅の乗降客数[14]，A は鉄道運行に携わっている人々[15]を，B は距離を伸縮させる係数（交通条件など）を，n は駅のランクでもあり，都心部からの駅数を，$n^{\frac{\alpha}{\beta}}$ は都心から最終駅（n 番目の駅）までの距離[16]を，β は引力モデルの抵抗係数をそれぞれ示す。

つぎに，(26) 式を用いてシミュレーション分析を試みる。

12　これは，乗降客数に代表される。なぜならば，乗降客数は企業数に比例しているからである。

13　この大きさは都心部の集積の大きさを反映している。

14　主に都心部への通勤・通学者を指す。

15　これは運転手，車掌を含む鉄道サービス雇用量を示す。実際には，マイナスの乗降客数にならないために調整された定数である。

16　この距離は，ランクを距離に変換するために（8）式から導かれるものである。

(1) 都心部の集積度を示す P_1 が異なるケース

図 4 は，B＝1，α＝1，β＝2 で，都心部の集積の差を P_1＝1000 と P_1＝2000 で描かれている。

図 4 から，都心部の集積度（ここでは P_1）が高いほど都心部周辺で乗降客が減少して，そこから比較的急に上昇することが示される。ちなみに，図 4 の形状は，都心部の集積度に関わらず竹内・神頭（2012 年，p. 12 の図 7）のモデルでは，大都市圏における駅の数が比較的多い場合は，都心ターミナルに最も近い駅の乗降客数が最小で，そこから最終の駅となる第 2 ランクの駅まで増加していくことが示されている。また，大都市圏における駅の数が比較的少ない場合は都心ターミナルから駅の乗降客数が減少していくことが示されている。

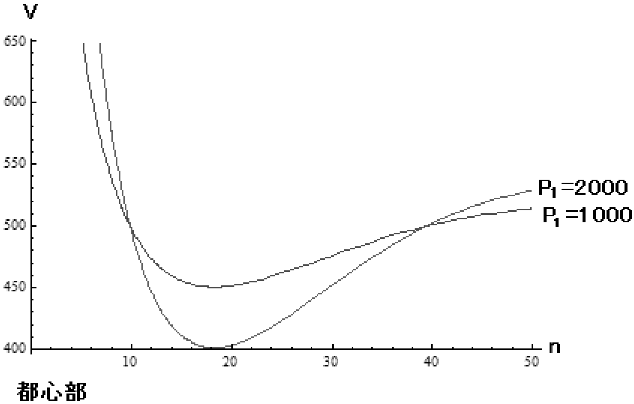

図 4

(2) 駅規模（乗降客数）の格差を示すαが異なるケース

図 5 では，P_1＝1000，A＝500，B＝1，β＝2 で，α＝0.8 とα＝1 の場合が描かれている。

図 5 から，乗降客数に格差のある鉄道は格差のない鉄道に比べると，都心部に比較的近い駅で乗降客数が減少して，そこから郊外に向けて徐々に増加する。乗降客数に格差のない鉄道は都心部からの乗降客数が徐々に減少する。

ちなみに，図 5 のα＝0.8 の曲線は JR 京葉線（東京－蘇我，17 駅），JR 東海

道本線（東京－平塚，11 駅），JR 常磐線（北千住－牛久，9 駅），つくばエクスプレス（北千住－つくば，16 駅）に相当する。

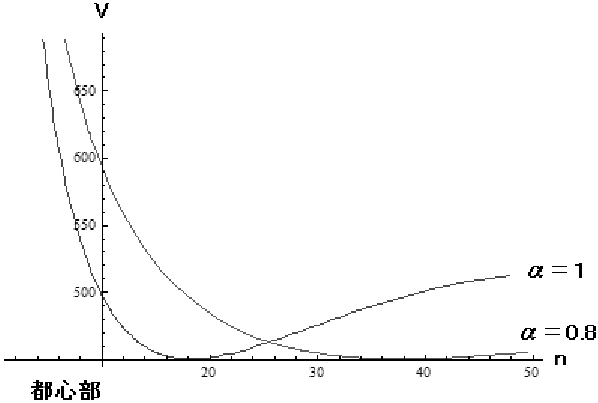

図 5

(3) 交通条件としての距離の長さである B が異なるケース

図 6 では，P_1＝1000，A＝500，α＝1，β＝2 で，B＝1 と B＝2 の場合が描かれている。

図 6 から，時間距離をここでの距離と考えた場合，速度の速い電車を有する鉄

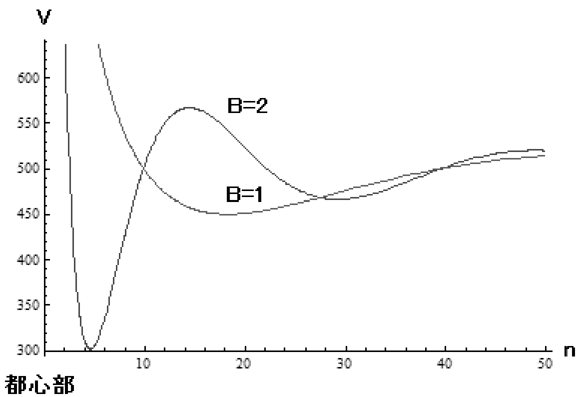

図 6

道は，都心部から乗降客数は徐々に減少し，都心部周辺から郊外に向かって徐々に増えていく。一方速度の遅い電車は，乗降客数は都心から急に減少し，最初の駅から急に増加して，都心部周辺部の駅で局地的に最大化され，そこから減少して，また郊外に向けて増加していくことを示唆している。

ちなみに，図 6 における $\beta=2$ の曲線は JR 中央本線（新宿－立川，17 駅）および京王線（新宿－調布，16 駅）に相当している。

Ⅳ　ラテン方陣，都市の形成および駅の立地

ここでは，昔から知られている組み合わせ論の一つであるラテン方陣（または方格）を用いて人口の大きさの異なる都市および駅の立地形態について考えてみよう。

ラテン方陣とは，$n \times n$ の正方形に異なった文字または数が 1 度だけ現れるようにした表であり，n をラテン方陣の位数と呼ばれている[17]。

ラテン方陣を都市および駅の立地に応用するに当たり，つぎの諸仮定が設定される。

(1) 円形（または正方形）の都市圏の中心部には最大の都市であるランク 1 都市が存在している。

(2) 最大都市の中心部を通る等間隔の駅を有する主要鉄道が初期において南北，東西に走っており，まず都心ターミナルから 2 つの鉄道に沿って同数の都市が形成される。そこでの都市の大きさはランク・サイズの法則に従っている。同様に路線上の都市から交通の発達とともに秩序を維持しながら都市が創出されていく。ついで南北，東西の各路線上の 2 つの鉄道駅から最短で，かつ均等に行ける 45 °線上に第 3 の鉄道が建設される。

(3) ここでの都市圏において各鉄道上の都市数は同じになる。また，プッシュープル理論によって近隣の都市は南北東西において人口数に差がある。さら

17　ラテン方陣については，Aigner, M. and G. M. Zeigler（2001，訳出，第 25 章）および佐藤・一楽（2012）を参照せよ。このラテン方陣は，空間的相互作用モデルの OD 表，産業連関表との意味合いが強い。

に，都市には１つの駅が立地しており，都市の人口と駅の乗降客数は比例している。(図７および図８を参照[18])

上記の仮定を踏まえると，都市圏の都心が存在するランク１都市を除くと，最大都市と同規模の都市（ランク１都市と同等の都市）と最小都市は隣接するように立地する。それゆえ，以下のラテン方陣が示される。なお，各正方形の左隅の①は最大都市に立地している都心ターミナル駅を示している。また，○は駅を，○の中の数字は駅の乗降客数のランクを示している。

表１　ラテン方陣

①	②	③
②	③	1
③	1	②

3×3

①	②	③	④
②	③	4	1
③	4	①	2
④	1	2	③

4×4

①	②	③	④	⑤
②	③	4	5	1
③	4	⑤	1	2
④	5	1	②	3
⑤	1	2	3	④

5×5

①	②	③	④	⑤	⑥
②	③	4	5	6	1
③	4	⑤	6	1	2
④	5	6	①	2	3
⑤	6	1	2	③	4
⑥	1	2	3	4	⑤

6×6

①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
②	③	4	5	6	7	1
③	4	⑤	6	7	1	2
④	5	6	⑦	1	2	3
⑤	6	7	1	②	3	4
⑥	7	1	2	3	④	5
⑦	1	2	3	4	5	⑥

7×7

ここで，駅が等間隔で立地しているという点から結果的に円形の都市圏が仮定されていることと，交通が快速などによって最短（時間）距離で都市間を結んでいることなどの仮定を付け加えるならば，表１の各マトリクスの対角線（左上隅(都心）から右下隅（都市圏の限界地)）上に鉄道が開発されると，その鉄道路線上の都市の数が偶数の場合は最大都市と同等の都市（ランク１都市）を通過するが，奇数の場合はランク２の都市を通過することになる。また，その路線の最終の駅はランク n−1 の都市にある。したがって，対角線上の都市またはそこに立

18　これらの図は，円形都市圏の四分の一円を示している。

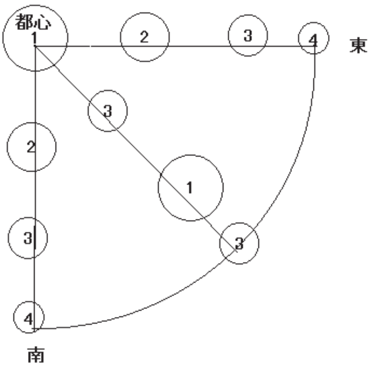

図 7　4×4 ケースの駅立地

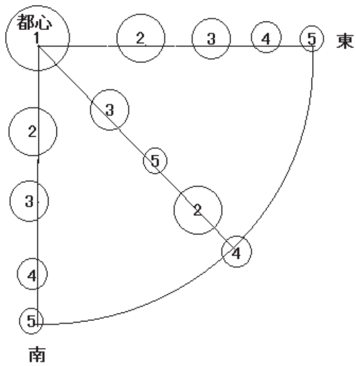

図 8　5×5 ケースの駅立地

地している駅の大きさは部分的にはランク・サイズの法則に従っているが，東西南北の路線上の秩序ある都市システムから見ると，都市の数でもある駅の数が奇数の場合は中央に立地する駅は最小のランク n と同等な駅であり，そこまでは奇数のランクの駅が順次立地して，中央から都市圏の限界駅までは偶数ランクの駅が順次立地していく。一方偶数の場合は駅のランクは 1 から始まる奇数ランクの駅となり，$\frac{n}{2}+1$ 番目の駅からは，1 から始まる奇数ランクが都市圏の限界駅まで繰り返される。(証明省略)

V　カテナリー関数（懸垂線）と町の盛衰

カテナリー関数は電線のたるみを調整するために用いられている関数であり，この関数は一般に，

$$F=\frac{A}{2}\left(e^{\frac{d}{A}}+e^{-\frac{d}{A}}\right) \tag{27}$$

で表される[19]。ただし，ここでは A は定数[20]，d は大都市間の中心に立地する町

19　この関数については，神永（2012,pp.194-209）において平易に説明されている。

20　この定数は，最下点の水平方向の張力/（(ひもの単位長さの質量)*(重力加速度)）から導かれる。

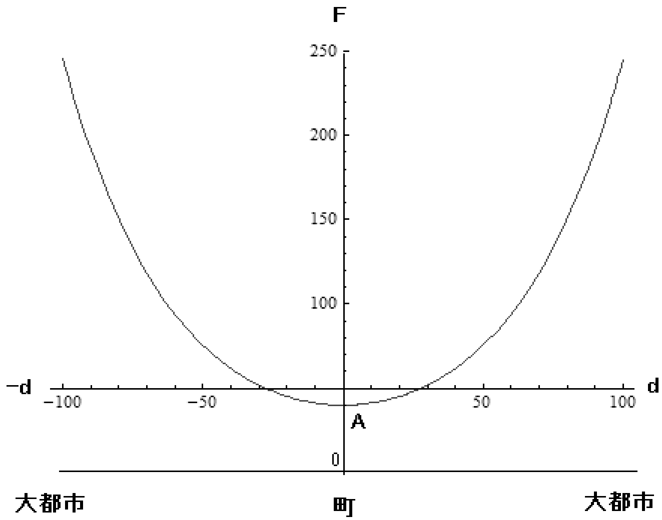

図 9

からの距離をそれぞれ示している。

(27) 式は，図 9 に A＝40 および−100≦d≦100 で描かれている。

(27) 式から，たるみ R は，

$$R = F - A = \frac{A}{2}\left(e^{\frac{d}{A}} + e^{-\frac{d}{A}}\right) - A \qquad (28)$$

で表される。(28) 式から，大きな 2 つの都市間にある町が 2 つの引力によって消滅するのは，たるみが消滅するときである。すなわち，町の消滅は完全に 2 つの大きな都市に引っ張られるときである。すなわち，R＝0 であることから，(28) 式は，

$$1 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{d}{A}} + e^{-\frac{d}{A}}\right) \qquad (29)$$

に変形される。したがって，(29) 式が成立するのは $\frac{d}{A}=0$ のときである。これは A に対して d がかなり小さい場合を想定すると，2 つの大都市の市場が拡大して真ん中の町が 2 つの大都市に吸い込まれていく状態を示している。

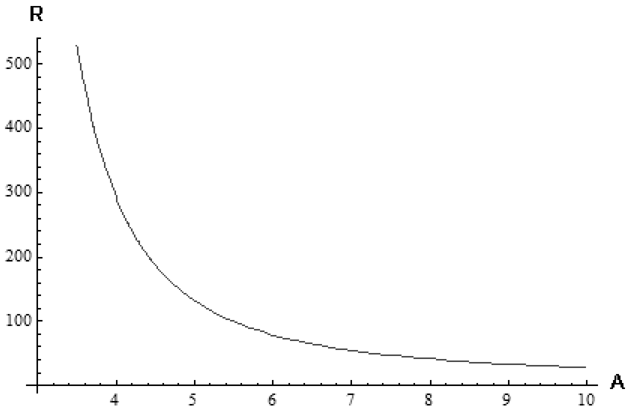

図 10

ここで，大都市間の距離が異なる場合の中間地点における町の消滅度（たるみの消滅度）を見ると，A は水平張力を示していることからこの水平張力を町に対する 2 つの大都市の引力と考えるならば，図 10 に描かれているようにその引力の増加は徐々に町の存在を無くさせていることを示唆している。

VI　おわりに

本論では，まずランク・サイズモデルから導かれるランクの引力とニュートンの重力モデルによる引力との関係から，ランクを距離に推計する方法を導いた。ただし，ランクと距離は出発点となる基準が同じものとしなければ計測できないことは否めない。光が最速であるというように。また，三角関数から成る AM 放送の信号関数から導かれる振幅関数に秩序性またはべき乗則にのっとったランク・サイズモデルとランクから推計される距離を応用して，駅周辺の集積，都心部の乗降客数，ランクとしての距離，距離を伸縮させることを速度変化とみなすことによって大都市圏における駅の規模である乗降客数の変化についてシミュレーション分析を試みた。そこでの分析結果と竹内・神頭（2012 年）の分析結果において東京首都圏の鉄道と一致する部分があることなどが分かった。さらに，ラテン方陣にランク・サイズの法則を応用することによって，都市の規模と駅の規

模が比例的で駅数を同じとする対角線の鉄道においては偶数と奇数に駅の大きさによる立地傾向に違いがあることが分かった。最後に，カテナリー関数を用いて2つの大きな都市の間にある町が2つの大都市の引力に従って徐々に衰退していくことが分かった。町が吸収合併されるのは突然の出来事ではなく，徐々に積み重ねられた結果の衰退（逆に言えば，新たな旅立ち）を意味している。

自然科学の法則や定理などを社会科学に応用した場合，秩序から混沌へ，混沌から秩序へ，またはその繰り返しの現象に遭遇したモデルでは，そこでの係数の微妙な違いによってグラフの形状が異なってくる。それゆえモデルのみで現実を単純に説明することができない。したがって，今後は構築された1つ1つのモデルを実証または検証することなどを通じて，モデルの完成度を高めていく必要がある。

付録

一般にニュートンの引力の法則において，質量を都市の人口に置き換えると，都市iおよび都市jにおける人口のポテンシャル[21]は，それぞれ

$$P_{ij}=A\frac{P_j}{D_{ij}} \qquad (1\text{-}1) \qquad \text{および} \qquad P_{ji}=B\frac{P_i}{D_{ji}} \qquad (1\text{-}2)$$

で表される。これら2つの式から相互作用としての引力は，

$$F_{ij}=P_{ij}P_{ji}=AB\frac{P_i\,P_j}{D_{ij}^2}=G\frac{P_i\,P_j}{D_{ij}^2} \qquad (1\text{-}3)$$

で表される。ただし，AB＝G および $D_{ij}=D_{ji}$ である。物理学において G は万有引力係数[22]と呼ばれている。

21　地域科学におけるポテンシャルについては，Carrothers（1956）で説明されている。

22　物理学における万有引力を示す係数 G は，$6.6726*10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$ である。これについては Watkins（2000，訳出，p. 56）を参照。

参考文献

Aigner, M. and G. M. Zeigler (2001) Proofs from the Book, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (邦訳 - 蟹江幸博『天書の証明』丸善出版，2012 年)

Alonso, W. (1964) Location and Land Use, Harvard University Press.

Beckmann, M. J. (1959) City hierarchies and the distributions of city size, Economic Development and Cultural Change, 6, 1959, pp. 243-248.

Buchanan, M. (2000) Ubiquity, Three Rivers Press, NewYork (邦訳 - 水谷　淳『歴史は「べき乗則」で動く』早川書房，2009 年

Carroll, J. D. (1955) Spatial Interaction and the Urban-Metropolitan Regional Description, Papers and Proceedings of the Regional Science Association 1, pp. 1-14.

Carrothers, G. P. A. (1956) An Historical Review of the Gravity and Potential Concepts of Human Interaction, Journal of the American Institute of Planners 22, pp. 94-102.

Christaller, W. (1933) Die zentralenOrte in Suddeutschland, Gustav Fischer, Jena, 331S (邦訳 - 江沢譲爾『都市の立地と発展』大明堂，1969 年)

Davies, R. L. (1976) Marketing Geography, vol. 4, Routledge.

Huff, D. L. (1964) Defining and Estimating a Trading Area, Journal of Marketing 28, pp. 34-38.

Isard, W. (1956) Location and Space-Economy, The M.I.T. Press (監訳 - 木内信蔵『立地と空間経済』朝倉書店，1964)

Kauffman, S. (1995) At Home in the Universe: The Search for Laws of Self-Organization and Complexity, Oxford University Press (監訳 - 米沢富美子『自己組織化と進化の理論ー宇宙を貫く複雑系の法則ー』ちくま学芸文庫，2008 年)

Krugman, P. (1996) The Self-Organizing Economy, Blackwell (邦訳 - 北村行伸・妹尾美紀『自己組織化の経済学』東洋経済新報社，1997 年)

Lakshmanan, T. R. and W. G. Hansen (1965) A Retail Market Potential Model, Journal of the American Institute Planners 31, pp. 134-143.

Lösch, A. (1940) Die raumlichOrdnung der Wirtschaft, Stuttgart: G. Fisher (邦訳 - 篠原泰三『経済立地論』大明堂，1968 年)

Prigogine, I. and I. Stengers (1984) Order out of Chaos, NewYork: Bantam Books (邦訳 - 伏見康治・伏見譲・松枝秀明『混沌からの秩序』みすず書房，1987 年)

Racorean, O. (2009) New Models in Regional and Urban Economics, Lambert Academic Publishing AG & Co. KG.

Reilly, W. J. (1931) The Law of Retail Gravitation, NewYork: G. P. Putnam's Sons.
Simon, H. (1955) On a Class of Skew Distribution Functions, Biometrica.
Von Thünen, J. H. (1826) Der Isolated Staat, in Beziehung auf Landwirtshaft and Nationalekonomie（邦訳 - 近藤康男『孤立国』農村漁村文化協会，1974 年）
Zipf, G. K. (1946) The $P_1 P_2/D$ hypothesis on the Intercity Movement of Persons, America Sociological Review 11: pp. 677-86.
Watkins, M. (2000) Useful Formulae: Mathematical & Physical, Bloomsbury publishing Inc.（邦訳 - 駒田　曜『公式の世界―数学と物理の重要公式 150―』創元社，2010 年）
Willson, A. G. (1967) A Statistical Theory of Spatial Distribution Models, Transportation Research 1, pp. 253-269.
石川義孝『空間的相互作用モデル―その系譜と体系―』地人書房，1988 年
神永正博『「超」入門　微分積分』講談社，2012 年
神頭広好『都市の空間経済立地論―立地モデルの理論と応用―』古今書院，2009 年
神頭広好『都市の立地構造―幾何学，地理学および集積経済からの発想―』愛知大学経営総合科学研究所叢書 37，2011 年
神頭広好『都市の形成，市場および集積の経済』愛知大学経営総合科学研究所叢書 38，2012a 年
佐藤　肇・一楽重雄『幾何の魔術―魔方陣から現代数学へ　第 3 版』日本評論社，2012 年
竹内啓仁・神頭広好「大都市圏における都市開発の空間的法則性」愛知経営論集，第 166 号，2012b 年
竹内啓仁・神頭広好「大都市圏における駅勢圏の空間的構造」日本交通学会第 71 回報告会（2012c 年，10 月 7 日（日），日本大学　理工学部）
都甲　潔・江崎　秀・林　健司・上田哲男・西澤松彦『自己組織化とは何か　第 2 版』講談社，2009 年
山根英司『関数とは何だろう』講談社，2008 年

あとがき

本叢書は，幾何学のイメージから不等式に到達したところからはじまる。昔から統計や確率のような精緻な学問は苦手であるが，好きでたまらなかった幾何学は直感的なところがあり，空想が芽生えていく。不等式は定理が分かれば無理な計算はしなくても最大値や最小値が分かる。逆流もするが，幾何学から不等式への流れは大雑把な自分にとって自然な流れではないかと考えている。ただし，幾何学と言ってもドーナツや微分を含まない初等幾何学である。しかもここで参考にした文献は，入門的な講談社ブルーバックスからハーディやリトルウッズなどの名著まで多彩にわたっている。

地域科学は自然科学から比べると歴史は浅い。それは地域科学が消費者の空間的行動や都市を対象としていることに対して自然科学は地球や宇宙の万物を対象にしていることである。すなわち，前者は消費者の行動から出発するのに対して後者は万物の根源を探ることになる。まさに「神の手」に触れる研究でもある。「私は神のパズルを解くのが好きだ」とか「私は神がどうやってこの世界を創造したのかを知りたい」という言葉は，信念をつらぬいたアインシュタインだからこそ言えるのではないか。アイディアというエネルギーを反射させながら宇宙へと旅立っていることでしょう。

1960 年代になると自然科学の手法を地理に応用する研究が盛んに行われ，これらの研究と経済立地論などを統合，整理する形で W. Isard によって地域科学が誕生することになる。私がここで参考にしている文献の多くは 1950 年〜1980 年くらいのものであり，1990 年〜現在においては，コンピュータの発達や GIS の普及によって自然科学のみならず地域科学における法則や手法は当たり前のごとく，プレゼンテーションにばかり気が配られている傾向がある。学問＝プレゼンテーションという風潮が高まることに危惧の念を抱いている。

敵のローマ兵が近づいて来たにも関わらず，道路上に幾何学の定理を描いていたアルキメデスを思い出してほしい。

あとがき

A.Einstain：*Illustrated by H.Kozu*

著者紹介

神頭広好（こうず ひろよし）

KOZU HIROYOSHI

愛知大学経営学部教授

専　攻　経営立地論，立地分析

愛知大学経営総合科学研究所叢書 41

都市化の集積経済効果と空間距離

2013 年 2 月 20 日発行
2013 年 3 月 19 日訂正再版発行

著　　　者　　神　頭　広　好

発　行　所　　愛知大学経営総合科学研究所
〒453-8777　名古屋市中村区平池町 4 丁目 60-6

印刷・製本　　株式会社　一 誠 社
名古屋市昭和区下構町 2-22

[非売品]

ISBN 978-4-906971-00-8