円形都市を有する都市圏構造
——平面幾何学とランク・サイズモデルの応用——

神　頭　広　好

I　はじめに

都市の相対的大きさは，お互いの引き合う力であるPullと自らが出ようとするPushの力関係で決まる。これらの空間的相互関係が複雑化したとしても都市の特性にこだわらなければ都市の規模と順位にはある程度の関係が見られる。また都市の規模に関わる変遷については大きくは2つに分けられよう。大きな都市からスタートして周辺にそれよりも小さな規模の都市が立地して行くケースと小さな都市からスタートして周辺にそれよりも大きな都市が立地して行くケースである。前者は一般のランク・サイズモデルが当てはまり，後者は逆ランク・サイズが当てはまる。通常は，小さな都市を都心部として，ここでの企業の集積によって人口の増加を通じて周辺部に都市が創出していく方が都市圏をイメージし易い。また，小さな都市を都心部として円の逆数を人口密度，昼間人口比，企業当りの生産力とすると逆ランク・サイズモデルの解釈が容易になる。

ここでは，平面幾何学の定理にもとづいて円形の都市からなる円形の都市圏を対象にして，主として同都市圏に立地している円形の都市の数や交通条件による違いから，都市圏の規模と都心部の規模，都市圏の規模と都市規模間の格差などの関係を明らかにするために，ランク・サイズモデルを応用する。その際，円の半径は円の面積と人口に比例的であるとみなし，

ここではニュータウンの部分を除いて，円の半径を都市圏，都市および都心部の大きさとしている。

II　円形の都市と都市圏

1．4つの円形都市を有する円形の都市圏

(1)　ニュータウン建設計画

Stewart の定理[1]から，図1において

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_5}\right)=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4} \qquad (1)$$

が導かれる[2]。ただし，r_1：円uの半径，r_2：円Aの半径，r_3：円Bの半径，r_4：円Cの半径，r_5：円Oの半径をそれぞれ示す。

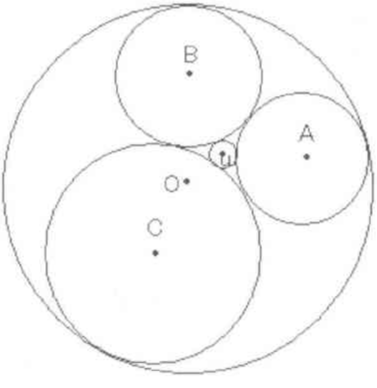


図1　4つの円都市と都市圏

---

(1)　この定理は，岩田（幾何学大辞典4，p. 232，［1504］）によると「同じ円に内接する2つの外接する円の半径の逆数（曲率）の和が一定」と言うものである。

(2)　これについては，岩田（幾何学大辞典1，p. 384-385，［681］，幾何学大辞典4，p. 273，［1581］）および岩田（補巻II，p. 121，［223］）を参照せよ。

ここで，通常のランク・サイズモデル

$$r_n = \frac{r_1}{n^\alpha} \tag{2}$$

を（1）へ代入すると，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{5^\alpha}{r_1}\right) = \frac{2^\alpha}{r_1} + \frac{3^\alpha}{r_1} + \frac{4^\alpha}{r_1} \tag{3}$$

で表される。さらに

$$1-5^\alpha = 2(2^\alpha+3^\alpha+4^\alpha)$$

に整理され，これをMapleで解くと，$\alpha = -1.873$ が求められる。

これは，逆ランク・サイズの法則を示している。ここで，$r_1 = 1$ とすると，

$r_2 = 3.7$，$r_3 = 7.8$，$r_4 = 13.4$，$r_5 = 20.4$

である。

この結果は，小さな人口規模を有する都市から出発して，人口の増加とともに周辺に人口が移っていき，そこに比較的大きな都市が出来上がるといったことを示唆している。ただし，円Oは円uを除いた他の円の境界に接している都市圏を示しており，言わば同質平野と比較優位性が存在する隠れた都市圏と言える。

これに対して大きな円からスタートする場合は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5^\alpha}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{2^\alpha}{r_1} + \frac{3^\alpha}{r_1} + \frac{4^\alpha}{r_1} \tag{4}$$

が導かれ，これを解くと $\alpha = 4.39$ が求められる。現実の都市のランク・サイズでの α は，ほぼ0から2の値である。

ここでは，小さな都市から出発する場合で，以下の3つのケースにおける通勤費を比較する。

（1）都市u，A，B，Cのそれぞれの中心部へ居住者が通勤するケース

（2）都市A，B，Cのそれぞれの中心部にニュータウンを建設して，都市uの都心部へ通勤するケース

(3) 都市u，A，B，Cが合併して，都市圏Oを都市とするケース

ちなみに，ケース（1）は都市独立型，ケース（2）は歴史都市中心型，ケース（3）は地形中心型をそれぞれ示していると言えよう。

ケース（1）における総交通費は，

$T_i = \pi + 3.7^3\pi + 7.8^3\pi + 13.4^3\pi = 2407.1\pi$

ケース（2）における総交通費は，

$T_u = \pi + 4.7 * 3.7^2\pi + 8.8 * 7.8^2\pi + 14.4 * 13.4^2\pi = 3186.4\pi$

ケース（3）における総交通費は，

$T_c = (3.7^2\pi + 7.8^2\pi + 13.4^2\pi) * 20.4 = 5183.4\pi$

上記の3つの分析結果から，ケース（1）が最も低くい。したがって，通勤者にとっては居住都市の中心部に通勤することが最も有効であることが示される。

ちなみに，残された空間を公共サービスに利用できる面積Sとすると，

$S = 416.2\pi - \pi - 13.7\pi - 60.8\pi - 179.6\pi = 161.1\pi$

であり，Sは都市圏全面積の約4割である。

⑵ 都心部の規模と都市圏の規模との関係

上記の（1）式から，

$$r_1 = \frac{r_5}{2ar_5 + 1} \qquad (5) \qquad \text{または} \qquad r_5 = \frac{r_1}{1 - 2ar_1} \qquad (6)$$

が導かれる。ただし，$a = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$ であり，この a は一定であっても r_2，r_3，r_4 がそれぞれ一定でないことに注意を要する。(以下の a についても同様)（6）の分母が正であることから $0 < r_1 < \frac{1}{2a}$ である。

この（6）は，都心部に企業移転に伴い人口が流入した場合都市圏の大きさがどのように変化して行くかを表している。ただし，a を一定とした場合は都市圏の空いているところにニュータウンなどの住宅地を設けてお

く必要がある。さらに，上記で導かれた r_2，r_3，r_4 を上式の a に代入すると，$a=0.473$ である。これを（6）へ代入すると，

$$r_5=\frac{r_1}{1-0.946r_1} \tag{7}$$

である。この（7）は Mathematica によって図 2 が描かれている。これは都心部に人口が流入すると徐々に都市圏が拡大していくことを物語っている。

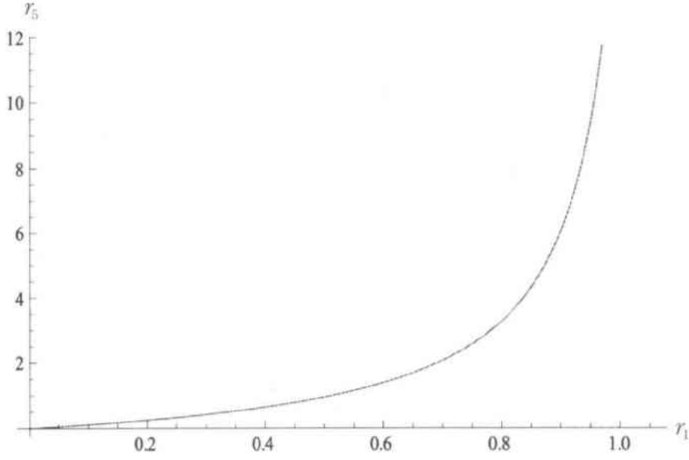


図 2　都市圏と都心部

(3)　見えざる都心部機能と都心部の規模

ここで，円 A，B，C，u において，Soddy の定理が成り立っているとすると，ここで見えざる中心地としての都心部機能を求めることができる[3]。

Soddy の 2 番目の定理[4]は，

(3)　これについては，神頭（2007，第 7 章）を参照せよ。

(4)　これについては，一松（2003，p. 77）を参照せよ。

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{2}{r} \tag{8}$$

であることから，

$$r=\frac{2r_1}{1-ar_1} \tag{9}$$

が導かれる。ただし，r は△ABC の内接円の半径を示しており，これが見えざる都心部機能を示している。さらに上記同様に a を一定として $a=0.473$ を（9）へ代入すると，

$$r=\frac{2r_1}{1-0.473r_1} \tag{10}$$

で表される。この（10）は Mathematica を用いて図 3 に描かれている。これは都心部が拡大して行くと，集積の経済によって見えざる都心部機能（または外部効果としての集積の経済）が逓増的に拡大して行くことを示唆している。

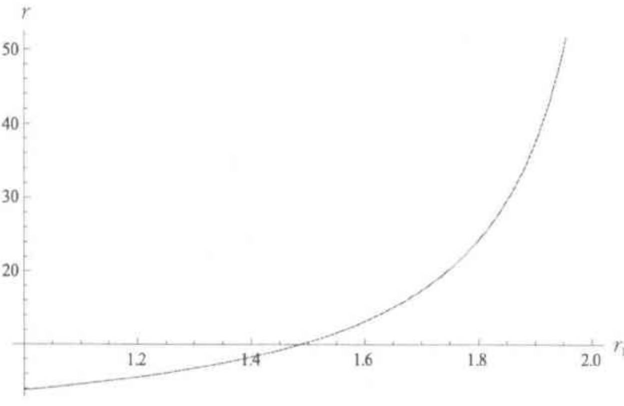


図 3　見えざる都心部機能と都心部

ここで，（5）を（10）へ代入すると，

$$r = \frac{2r_5}{0.477r_5+1} \tag{11}$$

が導かれ，これは図 4 から都市圏への人口の流入は，見えざる都心部機能を徐々に拡大することを示唆している。

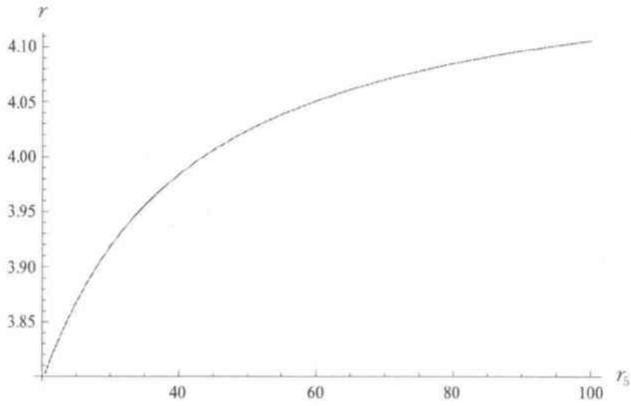


図 4　見えざる都心部機能と都市圏

(4)　都市圏がランク・サイズの法則に従わないケース

ここで，$r_5 = R$ とすると（3）から

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{R}\right) = \frac{2^{\alpha}}{r_1}+\frac{3^{\alpha}}{r_1}+\frac{4^{\alpha}}{r_1} \tag{12}$$

で表され，これを整理すると，

$$R = \frac{r_1}{1-2(2^{\alpha}+3^{\alpha}+4^{\alpha})} \tag{13}$$

である。この（13）に $r_1 = 1$ を代入して図示すると，以下の図 5 が描かれる。

したがって，都市規模の格差を示す絶対値としてのが小さくなるほど都市圏が逓増的に大きくなることから，大きな都市圏ほど都心部周辺の都市

規模の格差が小さいことを示唆している。

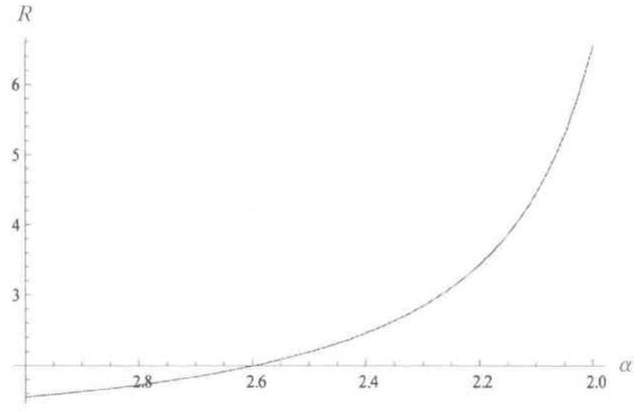


図5　都市圏と都市規模格差

ちなみに，ここでの円都市圏における4円都市のケースでの α は4.39，Soddy の定理から単なる4円都市のケース[5]での α は3.12，傍接円における4円都市のケースでの α は1.73である。ただし，Soddy の定理は対象性であることから，α が正で計算されるためここでは大きい円からのスタートとして，すなわち通常のランク・サイズモデルとして α が計算されている。したがって，円としての都市圏が規定されている場合の都市の規模格差が最も大きく，ついで規定されない場合，さらに道路を境にして出来上がった計画的都市（傍接円）の場合は都市の規模格差は最も小さいことを示唆している。

2．円形の都市圏における4つの円市場と中心都市

円AとD，円BとCがそれぞれ1点Mで外接して，それら4つの円

(5)　これと傍接円のケースについては，神頭（第4章，2007）を参照せよ。

が1つの円に内接しているならば，つぎの式が成り立つ(6)。

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3} \tag{1}$$

ただし，r_1：円Aの半径，r_2：円Bの半径，r_3：円Cの半径，r_4：円Dの半径をそれぞれ示す。

ここで，円の大きさに対してランク・サイズモデルを適用すると，

$$\frac{1}{r_1}+\frac{4^{\alpha}}{r_1}=\frac{2^{\alpha}}{r_1}+\frac{3^{\alpha}}{r_1} \tag{2}$$

から

$$1+4^{\alpha}=2^{\alpha}+3^{\alpha} \tag{3}$$

であり，これより，$\alpha=0$となる。ここで4つの円市場に外接する円を都市圏として，4つの市場が互いに交じり合う唯一の点を中心都市とすると，ランク・サイズの法則が成り立たないことを示唆している。

これについては，市場は空間においても境界の重複はありえるが，都市においての重複はありえないことの証明ではないかと考えられる。

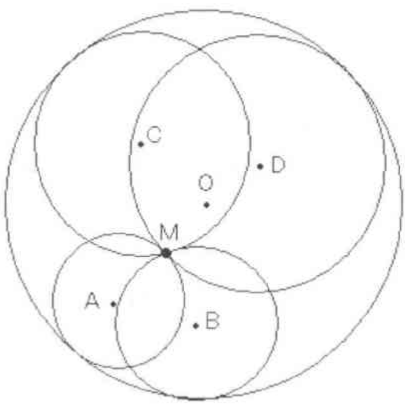


図6　4つの円市場

(6)　これについては，岩田（幾何学大辞典（補巻Ⅱ，p. 120-121，[222]）を参照せよ。

3．直径の道路を有する５つの円形都市を有する円形の都市圏

図７から対象な円Ｄおよび円Ｅの半径をxとすると，

$$x=\frac{r_1(r_1+r_2)(r_1+r_3)}{r_2r_3-r_1^2} \tag{1}$$

および

$$x=\frac{2r_1R}{R-r_1} \tag{2}$$

が成立する(7)。ただし，r_1：円Ａの半径，r_2：円Ｂの半径，r_3：円Ｃの半径，R：円Ｏの半径をそれぞれ示す。

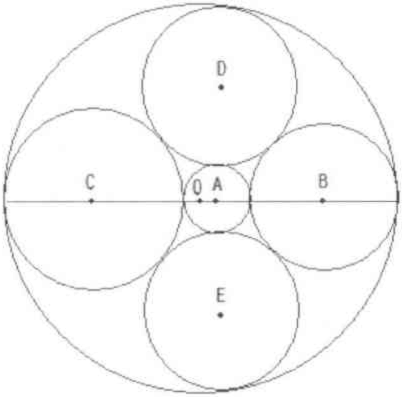


図７　直径の道路を有する５つの円都市と都市圏

ここで，中心に位置している円Ａを都心部として，円Ｏを都市圏とすると，都心部が周辺都市の規模の格差にどれだけ影響されるかを見るために，(1) および (2) にランク・サイズモデルを応用すると，

(7)　これについては，岩田（幾何学大辞典 4，pp. 271-272，［1579］）を参照せよ。

$$x = \frac{r_1(r_1+r_2)(r_1+r_3)}{r_2r_3-r_1^2} = \frac{r_1(r_1+\frac{r_1}{2^\alpha})(r_1+\frac{r_1}{3^\alpha})}{\frac{r_1^2}{6^\alpha}-r_1^2}$$

$$= \frac{r_1(1+\frac{1}{2^\alpha})(1+\frac{1}{3^\alpha})}{\frac{1}{6^\alpha}-1} \qquad (3)$$

また，(3) と (2) から

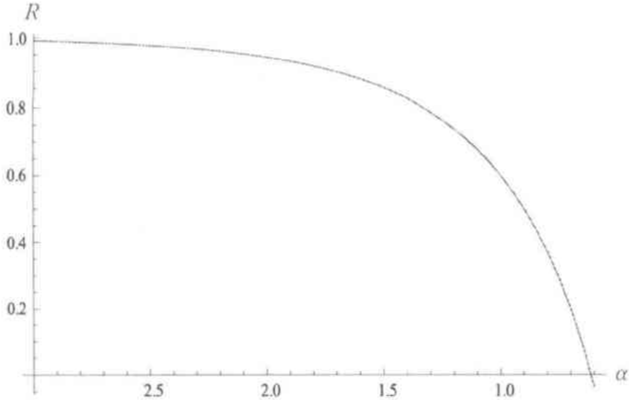
$$\frac{(1+\frac{1}{2^\alpha})(1+\frac{1}{3^\alpha})}{\frac{1}{6^\alpha}-1} = \frac{2R}{(R-r_1)} \qquad (4)$$

である。これを整理すると，

$$R = \frac{Z}{Z-2}r_1 \qquad (5)$$

ただし，$Z = \dfrac{(1+\frac{1}{2^\alpha})(1+\frac{1}{3^\alpha})}{\frac{1}{6^\alpha}-1}$ および $Z > 2$

(5) から，Z を一定とすると都心部と都市圏は比例的関係（図省略）にあるが，図 8 から絶対値としての α が大きくなるにつれて逓減的に都市圏が拡大することから，大都市圏ほど都市圏内の都市の規模に少しずつ格差が見られることを物語っている。



注）ここでは，都市圏と主要道路に沿った都市の規模の格差との関係によることに注意を要する。

図８　都市圏と都市規模格差

ここで，直径の道路上における都市の順位は分かっているが，道路上にない都市については分からないとしよう。図７の円の直径道路の半径は

$$R = r_1 + r_2 + r_3 \tag{6}$$

で表されることから，これを（2）に代入すると，

$$x = \frac{2r_1R}{R - r_1} = \frac{2r_1(r_1 + r_2 + r_3)}{r_2 + r_3} \tag{7}$$

である。ここで，(3) = (7) とこれにランク・サイズモデルを応用することによって，

$$\frac{r_1(1 + \frac{1}{2^\alpha})(1 + \frac{1}{3^\alpha})}{(\frac{1}{6^\alpha} - 1)} = \frac{2r_1(r_1 + r_2 + r_3)}{(r_2 + r_3)} \tag{8}$$

が成立する。これを Mathematica で解くと $\alpha = -1$ が求められる。ちなみに，この式に６番目の都市が登場していることは興味深い。したがって，

ランク・サイズモデルから

$r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3,\ R = 6$

が計算される。また，これらを（7）へ代入すると，$x = 2.4$ であることから他の等しい 2 つの円 D および E の半径は 2.4 である。この円から成る 2 つの都市はランクで言うならば 3 番目の都市となる。このランクの順位が都市のできた順位であるとすると，A→B→（DE）→C である。

ここでは，以下の 3 つのケースについて考察する。

（1）各都市の中心部 A，B，C，D，E に中心地機能が集中するケース

（2）中央に位置する都市 A に中心地機能が集中するケース

（3）都市圏の地理的中心 O に中心地機能が集中するケース

ケース（1）において，居住者の総交通費用は

$TC_i = \pi + 2^3\pi + 2*2.4^3\pi + 3^3\pi = 63.65\pi$

ケース（2）において，居住者の総交通費用は

$TC_c = \pi + 3*2^2\pi + 2*3.4*2.4^2\pi + 4*3^2\pi = 88.17\pi$

ケース（3）において，居住者の総交通費用は

総人口が，$\pi + 2^2\pi + 2*2.4^2\pi + 3^2\pi = 25.52\pi$

であることから，この人口が都市圏に均等に立地している場合は，

$$TC_o = 6^3\pi * \frac{25.52\pi}{6^2\pi} = 153.12\pi$$

円周上にニュータウン建設の場合は

$TC_n = 6*25.2\pi = 153.12\pi$

上記の 3 つのケースを比較すると，ケース（1）が最も総交通費が少ないことから，各都市の中心に機能を集中させた方が得策である。これは，4 つの円を有する都市圏のケースと同じである。

ちなみに，都市圏における公共財および公共サービスを供給するための空間の割合は，$\dfrac{25\pi}{36\pi} = 0.694$ であることから約 7 割である。

4．7つの円形都市を有する円形の都市圏

以下の図9から，都市圏円Oの中に7つの円形の都市A，B，C，D，E，F，Gがあり，それぞれの都市が互いに接しているとき，つぎの式が成り立つ[8]。

$$r_5 = \frac{r_1 r_2 r_3}{2r_2(r_1+r_3)-3r_1 r_3} \tag{1}$$

ただし，r_1：円Bの半径，r_2：円Cの半径，r_3：円Dの半径，r_4：円Eの半径を，r_5：円Fの半径をそれぞれ示す。

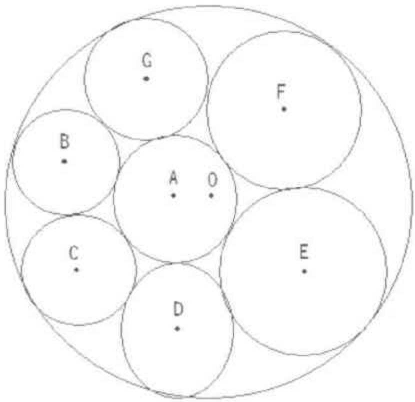


図9　7つの円都市と都市圏

⑴　都市圏と都心部

ここで，ランク・サイズモデル $r_n = \frac{r_1}{n^a}$ を（1）へ適用すると，

⑻　これについては，岩田（幾何学大辞典5，pp. 401，[994]）を参照せよ。

$$\frac{r_1}{5^\alpha} = \frac{\dfrac{r_1^3}{6^\alpha}}{\dfrac{2}{2^\alpha}(1+\dfrac{1}{3^\alpha})-\dfrac{3}{3^\alpha}} \tag{2}$$

が導かれ，$r_1 = 1$ として，(2) を Mathematica で解くと，$\alpha = 3.175 \cdot 10^{-16}$ が求められる。ちなみに，この α は限りなくゼロに近いことから，6 つの都市の規模においてほとんど格差がないことを示している。

ここで，都心部に関係なく周辺都市の順位が決まる場合の都心部と都市圏との関係について見ると，定理のプロセスにおいて

$$\frac{1}{r_5} = -\frac{1}{r_2}+3\cdot(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}) \tag{3}$$

の関係が成り立つことから，

$$r = \frac{R}{aR+1} \quad (4) \qquad \text{または} \qquad R = \frac{r}{1-ar} \quad (5)$$

が導かれる。ただし，$a = \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_2})$ である。さらに (5) に $r_5 = r_2 = 1$ として代入すると，

$$R = \frac{r}{1-\dfrac{2}{3}r} \tag{6}$$

で表される。ただし，R が正であることから $0 < r < \frac{3}{2}$ にある必要がある。

(6) をプロットしたものが図 10 である。したがって，都心部の初期の規模に関わらず，都心部への企業移転に伴う人口の流入は都市圏を逓増的に拡大させる。その際，2 番目の都市と 5 番目の都市が一定の規模を維持していることになるため，他の都市においての人口の変動が見られるか，都市圏内の公共空間にニュータウンが建設されることになる。

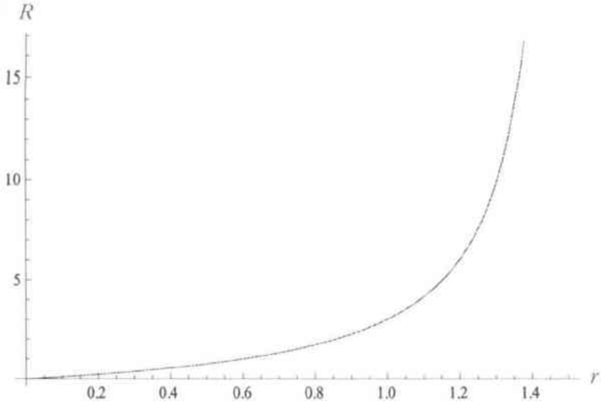


図 10　都市圏と都心部

⑵　都市圏と都市規模格差

ここでは，(5) と a から，ランク・サイズモデルを応用すると，

$$R = \frac{r}{1-\frac{1}{3}(5^{\alpha}+2^{\alpha})r} \qquad (7)$$

で表される。$r=1$ として，R と α の関係をみると，図 11 から大都市圏ほど都市規模の格差が小さいことを示唆している。

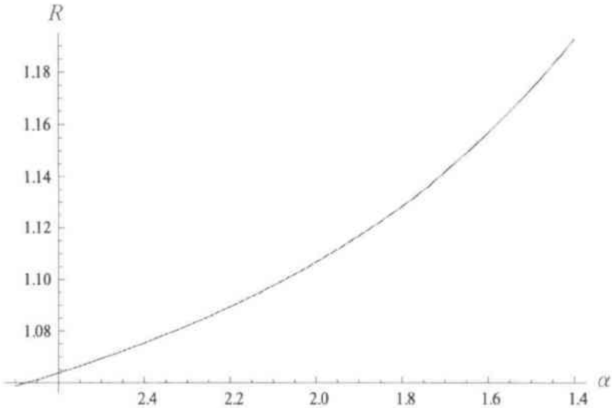


図 11　都市圏と都市規模格差

上記の分析結果から，大きな都市からの出発よりも小さな都市からの出発の方が都市間の規模に差があることが分かる。また，ある意味においては，隠れた都市圏を示している。

5．直径の道路が存在する 7 つの円形都市を有する円形の都市圏

図 12 から，つぎの式が成立する[9]。

$$\frac{1}{r}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{R} \tag{1}$$

ただし，r：円 A の半径，r_1：円 B の半径，r_2：円 C の半径 r_2，R：円 O の半径 R をそれぞれ示す。

(9)　これについては，岩田（幾何学大辞典 4，pp. 286-287，[1600]）を参照せよ。

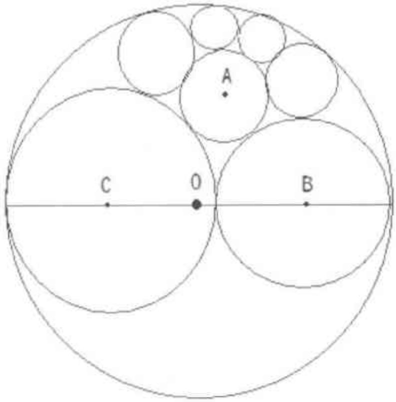


図 12　直径道路を有する 7 つの円都市と都市圏

(1)　都市圏と都心部

ここで，円 A を都心部，円 O を都市圏とすると，都市圏と都心部の関係は（1）から

$$R = \frac{3r}{4ar-3} \tag{2}$$

である。ただし，$a = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$ および $r > \dfrac{3}{4a}$

ここで，$a = 1$ として，（2）をプロットすると，図 13 が描かれる。

この図から，大きな都心部を有する都市圏ほど，相対的に小さい都市圏規模を有していることを示している。

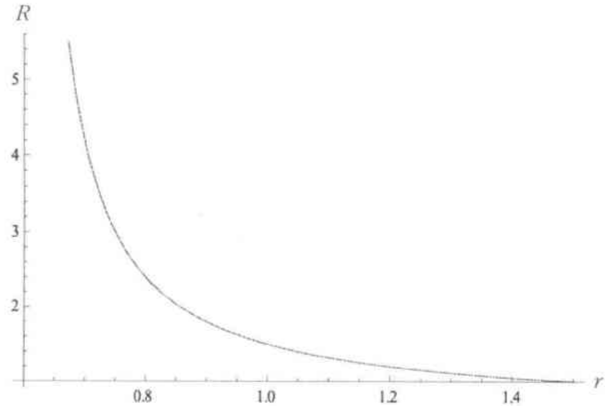


図 13　都市圏と都心部

(2)　都市圏と都市規模格差

ここで，ランク・サイズの法則（または逆ランク・サイズの法則）が成り立っているとすると，

$$a = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} \tag{3}$$

から

$$R = \frac{3}{4(1+\frac{1}{2^{\alpha}})-3} = \frac{3}{1+\frac{4}{2^{\alpha}}} \tag{4}$$

が成り立つ。$0 < \alpha < 3$ として (4) をプロットすると，図 14 が描かれる。

つぎの図 14 から，都市圏の大きさと都市規模の格差の大きさを示す α は比例的であることから，大きな都市圏ほど都市圏内の都市の規模に格差が見られると言えよう。

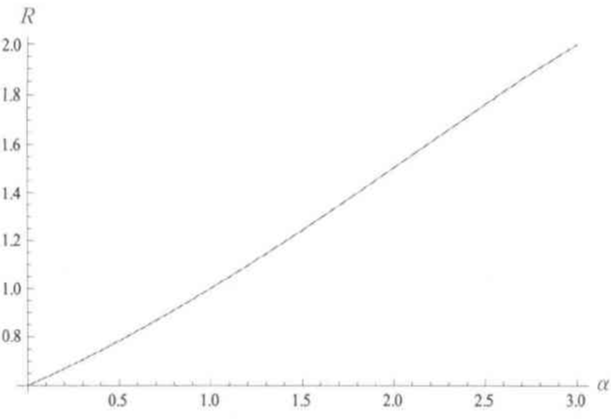


図 14　都市圏と都市規模格差

6．10 の円形都市を有する円形の都市圏

ここでは，Elemen. Der Math. Bd. 18, Nr. 6 (1963), p. 136 にもとづいており，図 15 から円形の都市 J，I，H，F，E，D，C，B，A の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4，r_5，r_6，r_7，r_8，r_9 とすると，つぎの定理が成り立つ[10]。

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}=18\left(\frac{1}{r_7}+\frac{1}{r_8}+\frac{1}{r_9}\right) \qquad (1)$$

ただし，この定理には円 O および円 G の半径は直接には関わっていない。

上記の定理にランク・サイズモデルを応用すると，

$$1+2^{\alpha}+3^{\alpha}+4^{\alpha}+5^{\alpha}+6^{\alpha}=18(7^{\alpha}+8^{\alpha}+9^{\alpha}) \qquad (2)$$

が導かれ，これを Maple で解くと $\alpha=-1.679$ が求まる。したがって，この場合は α の符号がマイナスであることから逆ランク・サイズモデル

---

(10)　これについては，岩田（幾何学大辞典 4，pp. 287-288，［1602］）を参照せよ。

となる。

一方，大きな円から出発すると，円形の都市 A，B，C，D，E，F，H，I，J の半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4，r_5，r_6，r_7，r_8，r_9 とすると，定理から

$$\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}+\frac{1}{r_8}+\frac{1}{r_9}=18\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right) \tag{3}$$

で表される。これにランク・サイズモデルを応用すると，

$$4^{\alpha}+5^{\alpha}+6^{\alpha}+7^{\alpha}+8^{\alpha}+9^{\alpha}=18(1^{\alpha}+2^{\alpha}+3^{\alpha}) \tag{4}$$

が導かれ，これを解くと $\alpha=1.932$ である。

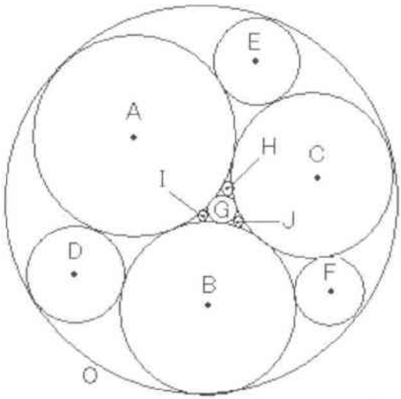


図 15　10 の円都市と都市圏

(1)　都心部としての G の導出

ここで，円 A，円 B，円 C の円を利用して，Soddy の定理が成り立っているとすると，G の半径を求めることができる。また,円の中央部に位置する G を都心部として，これを支えている見えざる都心部機能を求めることができ，その都心部機能が昼間人口に比例しているとすると，この都心部における昼間人口比率を（ΔABC の内接円の面積）／(円 G の面積)，

として求めることができる。

Soddy の定理[11]は，

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) \tag{5}$$

であることから，$r_A = r_1 = 100$ とすると

$$r_B = r_2 = \frac{100}{2^{1.932}} = 26.2$$

$$r_C = r_3 = \frac{100}{3^{1.932}} = 12$$

がそれぞれ導かれ，これらを（5）へ代入すると，

$$\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{26.2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{r_4}\right)^2=2\left(\frac{1}{100^2}+\frac{1}{26.2^2}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{r_4^2}\right) \tag{6}$$

で表される。ただし，r_4 は円 G の半径を示している。

これを解くと，

$r_4 = r_G = 3.8$

が求められる。G は円の中央に位置していることと，大きな都市 A，B，C に接していることから，アクセスにおいて集積の経済を受け易い都心部を指していると言えよう。また，H，I，J はそれぞれ 2 つの大きな都市に接していることから副都心的な役割を有している地区と言えよう。

さらに，円 O の半径 r_O を求めるために，つぎの 5 円の定理

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_G}-\frac{1}{r_O}\right)=\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_C} \tag{7}$$

へ上記で導かれた r_G，r_A，r_B，r_C を代入することによって求められる。

---

(11) これについては，一松（2003, pp. 75-77）を参照せよ。また，この定理は 1646 年に Descartes がボヘミア王女へ宛てた手紙の中でも見られるとのことである。（岩田（幾何学大辞典 1，pp. 384-385，［681］）を参照）

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3.8}-\frac{1}{r_O})=\frac{1}{100}+\frac{1}{26.2}+\frac{1}{12}$$

から

$$r_O=6437.07$$

である。

(2) 見えざる商業機能としての都心部機能

Soddy の 2 番目の定理は,

$$\frac{1}{r_4}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{2}{r} \tag{8}$$

である。ただし，r は△ABC の内接円の半径を示す。これは見えざる都心部機能の大きさの尺度でもある。この定理にそれぞれの半径を代入すると,

$$\frac{1}{3.8}=\frac{1}{100}+\frac{1}{26.2}+\frac{1}{12}+\frac{2}{r}$$

となり，これを解くと $r=15.2$ が求まる。これは都心部機能が 3 番目のランクの都市と同等であることを示唆している。

したがって，この機能の大きさを集積の効果とみなせば，実際の都心部の大きさ r_G に対して $\frac{15.2}{3.8}=4$ となり，4 倍の効果を有していることになる。

(3) 見えざる都心部機能と都市規模格差

ここで，(8) を (3) へ代入すると,

$$\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{r_6}+\frac{1}{r_7}+\frac{1}{r_8}+\frac{1}{r_9}=18(\frac{1}{r_4}-\frac{2}{r}) \tag{9}$$

で表され，これにランク・サイズモデルを応用すると,

$$4^\alpha+5^\alpha+6^\alpha+7^\alpha+8^\alpha+9^\alpha = 18(4^\alpha-\frac{2r_1}{r})$$

または，

$$r=\frac{2r_1}{4^\alpha-\frac{1}{18}(4^\alpha+5^\alpha+6^\alpha+7^\alpha+8^\alpha+9^\alpha)} \tag{10}$$

で表される。この（10）を r が正となる $0<\alpha<2$ の範囲で，シミュレーションを行うと，図 16 が描かれる。

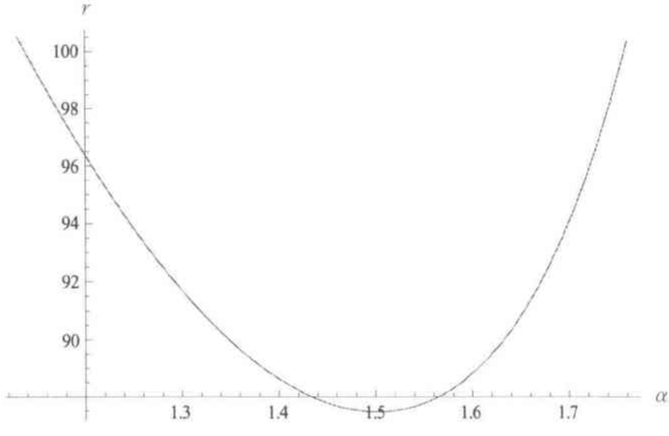


図 16　見えざる都心部機能と都市規模格差

ただし，$r<r_1=100$ であることから α が $1.13<\alpha<1.76$ である必要があり，これにもとづいて図 16 が描かれている。したがって，この図から見えざる都心部機能は α が 1.5 位までは見えざる都心部機能が徐々に減少するが，1.5 を過ぎると逓増的に拡大する傾向にある。ちなみに都市規模格差を示す α がほぼ 1.5 のとき，最小の見えざる都心部機能 r は 87.5 である。

これについては，都心部周辺都市の規模格差が大きくなるにつれて特化していく都市が増え，その結果都心部への依存度が弱まる。ところが，ある程度の格差（$\alpha = 0.5$）を超えると，生産や需要の拡大から都心部への依存度が高まっていくことが考えられる。

7．総合的考察

上記の分析結果から以下のことが整理される。

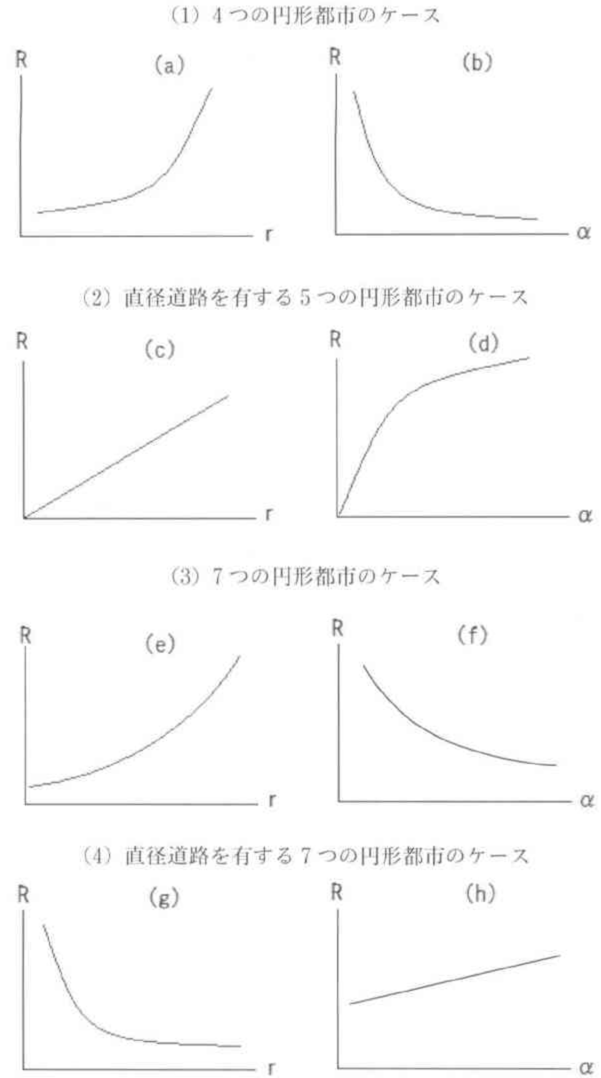
(1) 図 17 から，4 つの円形都市が存在する場合，(a) から都心部が大きいほど都市圏はより大きく，(b) から都市圏が大きいほど都市規模の格差が小さい。また，図 3 から都心部が拡大すると，逓増的に見えざる都心部機能が増大する。さらに，図 4 から都市圏が拡大して行くと都心部機能が徐々に増大する。最後に，円形の都市圏が存在しない場合については都市規模格差がより小さくなり，道路を介する傍接円の場合についてはその格差がさらに小さくなる。

(2) 図 17 から，直径道路を有する 5 つの円形都市が存在する場合，(c) から都心部規模と都市圏規模は比例的であり，(d) から都市圏が大きくなるにつれて都市規模の格差が拡大して行く。

(3) 図 17 から，7 つの円形都市が存在する場合，(1) 同様に (e) から都心部が大きいほど都市圏はより大きく，(f) から都市圏が大きいほど都市規模の格差が小さい。

(4) 図 17 から，直径道路ありの 7 つの円形都市が存在する場合，(g) から都心部が大きいほど大都市圏は小さく，(h) から都市圏が小さいほど都市規模格差は小さい。

(5) 図 17 の (1) および (3) から，円形の都市圏に存在する 4 つの円形都市と 7 つの円形都市の場合は，都市圏と都心部，都市圏と都市規模格差についてのそれぞれの関係は同じ傾向にある。



注）すべての図においてαは，絶対値として表されている。

図 17　都市圏（R），都心部（r）および都市規模格差（α）

(6) 図17の (2) および (4) から，直径の道路を有する5つの円形都市と直径の道路を有する7つの円形都市の場合は，都市圏の規模が拡大すると，都市規模格差が増大する傾向にある。

(7) 図17から，7つの円形都市が存在するケースで，直径の道路が交通の比較優位性として存在する (4) の場合は，直径の道路が無い (3) の場合と比較して，大きな都市圏ほど都心部が相対的に小さく，都市規模格差が大きいことを示唆している。

(8) 10の円形都市が存在する場合は，図16から見えざる都心部機能が最小になるときの都市規模格差は約1.5である。

8．多くの円と計画都市

図18から，初期の都市圏Oが人口の増加とともに中心部を突き抜ける主要道路がある交通条件の良い東方へ住宅都市が拡大して，空間と交通条件との関わりから順次住宅都市が開発されていくと結果的に円形の都市圏Sが成立する。ここで各住宅都市の境界■で示されるところにショッピングセンターを設けようとすると，物流の中心地点は交通費均等の観点からPが最適である。

このPからショッピングセンターへの距離をxとすると，定理から

$$x = \frac{2Rr}{R+r} \tag{1}$$

である[12]。ただし，r：円Oの半径を，R：円Sの半径をそれぞれ示す。

(12) これについては，岩田（幾何学大辞典4，p. 293，[1617]）を参照せよ。

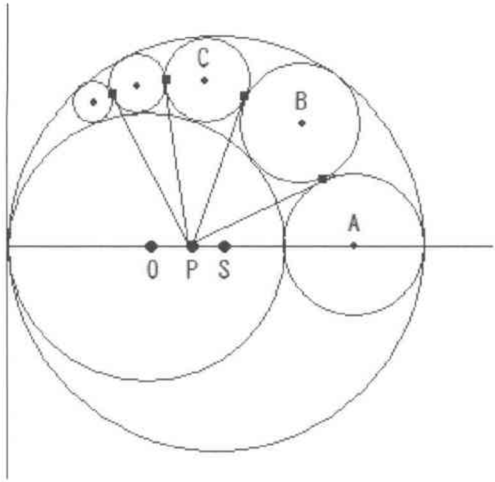


図 18　多くの円都市と都市圏

ここで，r を一定として，x と R の関係をみると図 19 から，都市圏が拡大すると均等距離は徐々に大きくなっていくことを示唆している。

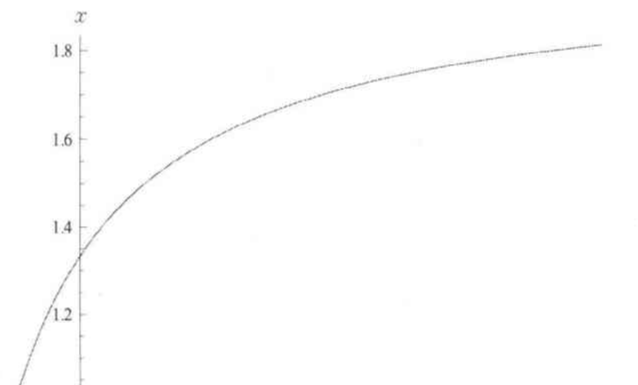


図 19　均等距離と都市圏

ちなみにＯにはCBDが，Ｓには副都心，Ｐは物流拠点が成立することになる。一方Ｐに中心地機能および病院などの公共施設を立地させ，■にニュータウンを立地させると，ある意味においてコンパクト化した都市圏になる。言い換えれば，物流の拠点の考え方をうまく利用するとコンパクトシティの構想にも当てはまる場合があると言えよう。

Ⅲ　おわりに

ここでは，幾何学大辞典に掲載されている円の定理にもとづいて，それら定理にランク・サイズを応用することによって，都市圏と都心部，都市圏と都市規模格差の関係を見るためにシミュレーション分析を試みた。その結果，4円と7円のケースについてはそれぞれの関係において同じ傾向があるが，直径道路を有する比較優位性が存在する5円と7円の場合は都市圏が大きいほど都市規模格差が大きいことが示された。これは，おそらく直径道路を対象に都市が創出される場合は，自由度が限定されるために都市規模の格差が大きくなるのではないかと考えられる。この証明は，今後の課題となる。ところで，ここでは分析結果を動学的に捉えるならば，人口から見た都心部のプッシュやプルの作用によって都心部の周辺都市における合併や独立の繰り返しを暗に含みながら都市圏の大きさが決められることを示唆している。また，定理によって円の数が限定されているが，他の空間において円形の都市圏に外接する円は存在するかもしれないため，一般に現状に近い形状も見られるのではないかとも考えられる。さらに見えざる都心部機能と都市規模格差については意外にも最小値が見られたことは興味深い結果であった。

ここでは，4，5，7，10の円だけが取り上げられているが，円形の都市圏空間においては円都市が創出する可能性は多く，これらの研究を通じて計画都市を構築する際の方向性を示し，実際の都市圏に対して実証するこ

とが必要である。

今後は，円形の都市圏に比較優位性を導入した場合の都市規模の格差や，都市圏の形状が円ではなく三角形や四角形をはじめ多角形の場合などについても同様な分析をする必要があり，これらの分析結果と現状との整合性を考察しなければならない。

〔追記〕
本論文は，第21回応用地域学会（ARSC）（2007年，12月8日（土），鳥取県立県民文化会館）において発表されたものであり，討論者である麻生憲一先生（奈良県立大学）から貴重なコメントを頂いたことに謝意を表する次第である。

参考文献

一松　信『現代に活かす初等幾何入門』岩波書店，2003年
岩田至康『幾何学大辞典（補巻Ⅱ）』槙書店，1993年
――――『幾何学大辞典（補巻Ⅰ）』槙書店，1993年
――――『幾何学大辞典1』槙書店，1971年
――――『幾何学大辞典2』槙書店，1974年
――――『幾何学大辞典3』槙書店，1976年
――――『幾何学大辞典4』槙書店，1978年
――――『幾何学大辞典5』槙書店，1980年
――――『幾何学大辞典6』槙書店，1982年
神頭広好『都市，交通およびニュータウンの立地 ― 平面幾何学の応用 ―』愛知大学経営総合科学研究所叢書31，2007年