[論　説]

古代ギリシャの数学 — 平方根問題 *

有　澤　健　治 †

Abstract

Irrational number problems in ancient Greece are discussed in this article. A new proof is presented for $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{17}$. The proof is elemental enough and can be a candidate of the proof that was presented by Theodorus in Plato's "Theaetetus". A possibility that Theodorus also succeeded in proving irrationality of $\sqrt{n}$ for non-square number n is also discussed with a possible proof at that time for him.

1　序論

ここでは古代ギリシャの数学史研究者にとってよく知られた問題、平方根問題をとりあげる。$\sqrt{2}$ が無理数であることが発見されたのは BC5 世紀と言われている。ピタゴラス学派による発見であることは確からしいが、誰であるかも時期についてもよくわかっていない。この件は数学史研究者に次の点で注目されている: 無理数の発見は当時の古代ギリシャの数学のレベルの高さを示している。なぜなら、これは論理の力によってのみ得られる発見であるから [1]。

ピタゴラス学派というのは、ピタゴラスが作った宗教組織 (ピタゴラス教

*この論文は筆者の Web の記事 [26] の一部を使って書かれている。論文としての追加と多少の修正がある。

†Kenji Arisawa, Aichi University, Nagoya, Japan, arisawa@aichi-u.ac.jp

1 無理数発見の意義については必ずしも研究者の間で一致してはいないように思える。

団) に属する数学者たちである。教団の戒律は厳しく[2]、次のような掟に縛られていたと言う[6]。

- 兄弟の誓い
- 共同生活
- 成果を共有する
- 教育内容や研究内容を外部に漏らしてはならない[3]

BC6 世紀中頃にエジプトやオリエントを旅行して帰国したピタゴラスはイタリア南部に位置するギリシャの植民地キオスで学校を開いた。当時のギリシャは文化的には後進国であったと考えられる。文化先進国であったエジプトやオリエントの知識や宗教に彩られたピタゴラスの学校は大いに繁盛したと言われている。

この頃のギリシャの哲学者たちは万物の起源を語るのが好きで[4]、タレスは「万物の起源は水」とか、ピタゴラスの「万物の起源は数である」とか、哲学者の数ほど異なる「万物の起源」が存在すると言っても過言ではないほど多様な説が語られている。その中で異色なのは物質を万物の起源としていないピタゴラスの説であった。彼の説を「数理が万物を支配していると」と解釈すると現代にも通用する優れた説なのであるが、しかしながら、ピタゴラスの説く「数」とはあくまでも自然数であって、長さなどを測って得られる数 (実数) ではない。彼らは自然数の崇拝者であった。

ピタゴラス教団は政治に強い影響力を持っていたがために、500BC 頃に教会は暴徒による焼き討ちに遭う[5]。学派はキオスから逃れ、地中海沿岸各地に散り散りになる。ピタゴラス自身もこの頃死亡する[6]。ピタゴラス学派はそれでも連絡をとりながらも存続する。ユークリッドの『原論』は BC3 世紀

[2]ヒッパソスは研究内容を外部に漏らしたために殺されたという伝承がある。真偽の程はともかく、このような噂がまことしやかに流れるほど戒律が厳しかったと考えられる。

[3]教育内容は必然的に外部に漏れるので、Ball の言っていることは不自然である。教育に使われていたテキストのことであると解釈すれば問題はない。テキストは講師だけが持っていたと考えられるから。

[4]神話的万物起源論に対する進歩的知識人の啓蒙活動であったと考えられる。

[5]時期については諸説があるようで、Frits[23] は 450BC 頃、ヴェルデン[9] は 430BC 頃としている。

の作と言われているが、読んでみるとわかるがピタゴラス学派の強い影響が見られる[6]。ピタゴラスの死後 100 年から 150 年間、ピタゴラス学派は生き残ったと言われている。

ピタゴラス学派の研究成果はピタゴラスが存命中は学派の外に出ることはなかった。成果を外に出すことは堅く禁じられていたからだと言われている。しかしピタゴラスの死後、このような統制は徐々に働かなくなる[7]。ピタゴラスの徒 (ピタゴラス学派の数学者たち) の中には生活に困って学派の研究成果を売るものも現れる[8]。それによってピタゴラス教団員でなくてもピタゴラス学派の研究成果を手に入れることが可能な時代になった。

$\sqrt{2}$ が無理数であることの発見はピタゴラス学派に強い衝撃を与えたと言われている。この数は自然数によっては表せない。自然数が万物を支配しているとするピタゴラス教団の教義の根幹が崩れたのであるから... ピタゴラスの徒の一人ヒッパソスにまつわる話がピタゴラス学派の狼狽え振りをよく伝えている。彼は無理数を発見したために殺されたとも言われている[9]。数学者は $\sqrt{2}$ の問題が片付けば次に $\sqrt{3}$ の問題に進むものだが、実際には長い沈黙の期間があった[10]。この問題は学派の中でタブー視されていたか、あるいは他の理由があったか? プラトンの『テアイテトス』にこれに関連した記述があるので、古代ギリシャの数学史研究者の間で注目を浴びてきた。

プラトンは 400BC 頃にアテネで学校を開いていた老齢のテオドロスを尋ねる。「良い子はいるかね?」とテオドロスに尋ねると「素晴らしい子がいるよ、名前はテアイテトス。テアイテトス、こちらに来てお話ししなさい」とプラトンとテアイテトスとの会話が始まる。以下はその紹介である [7]。

[6]自然数への強いこだわり。さらにピタゴラス学派 (例えばアルキュタス) の研究成果や、数字マニアのピタゴラスが好んだ問題 (例えば完全数) に関する研究成果が載っている

[7]ヴェルデン [9] は、秘密主義を巡ってヒッパソスが反旗を翻し、それが故に追放された。学派は分裂し、アルキュタスはヒッパソスの流れを受け継いでいるとしている。他方ヒース [10] は、無理数の発見の公表を巡る対立だとしている。

[8]ヴェルデン [9] p.147。またディオゲネス [20] p.277

[9]デイオゲネス [22] p.18 にある次の言葉にも注目したい:「『秘儀論』という書物は、(ピタゴラス学徒の) ヒッパソスのものであって、これはピュタゴラスを中傷するために書かれたのだと、ヘラクレイデスは述べている」

[10]Hardy[17] p.42 によると 50 年間。

> テアイテトス: それは [ある種の] 平方根について、すなわち 3 平方尺の正方形や 5 平方尺の正方形などの辺にあたるものについて、私たちのためにこのテオドロスさんは図形のあるものを描きながら、それは長さのままで計ると 1 平方尺の正方形の辺とは同じ単位の尺度では計りきれないものであるということを明らかにされていって、そして 17 平方尺の正方形の辺までをおのおの 1 つ 1 つ取り出してそういうふうにして下すったのですが、それまできて、どうということはありませんでしたが、それを止められたのでした。そこで私たちの間には何かこんなふうな考えが浮かんだのです。それはこの種の平方根というものは無限に多くあるものだということが明らかなものですからして、これを 1 つに統括することを試みようという考えなのです。つまりこの種の平方根を我々が全部その言い方で呼べるようになるものを見出そうとする試みなのです。

テオドロスは $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$ までについて無理数であることを証明したと言っている [11]。どのように証明したのだろうか? 今日的な視点からは素因数に関する知識のおかげで、一挙に結論が出せるのであるが、なぜ一つ一つ個別に吟味したのであろうか?

最初に、誤解を与える翻訳部分があるので、それをまず訂正しておく。「この種の平方根というものは無限に多くある」の「この種」は、この和訳では $\sqrt{n}$ が無理数になる n が無限にあると解釈される。しかし、この部分の英文は次のようになっている [8]。

> THEAETETUS: Theodorus was writing out for us something about roots, such as the roots of three or five, showing that they are incommensurable by the unit: he selected other examples up to seventeen —there he stopped. Now as there are innumerable roots, the notion occurred to us of attempting to include them all under one name or class.

[11] $\sqrt{17}$ が含まれているのか否かははっきりしないとの説もある。

つまり、問題にしなくてはならない無限に多くの $\sqrt{n}$ があると言っているにすぎない [12]。

『テアイテトス』のこの部分は古代ギリシャの数学史研究者にとっては有名なくだりで、幾つかの著書の中で取り上げられている [13]。代表的な立場は次の通りである。

(a) テオドロスは $\sqrt{17}$ が複雑になりすぎてギブアップした
(b) テオドロスは $\sqrt{19}$ が複雑になりすぎてギブアップした
(c) 紹介はしているが、追及されていない

以上はいずれも数十年も前の書籍である。筆者が調べた限りにおいては、最近の数学史関係の書籍では新しい進展は見つからない。ネットを調べてみても同様である [14]。その結果、$\sqrt{3}, ..., \sqrt{17}$ までがテオドロスの業績とされているのが現状である [15]。

テアイテトスは「これを 1 つに統括することを試みよう」と言っている。この試みの内容は、このくだりの少しあとで説明されている。簡単に言えば、数 (自然数) を自乗数と、それ以外の数とに分類し、それらの平方根は、自乗にならない数については (近似計算に訴えないで) そのまま扱おうというわけである。つまり現代的に言えば、n の平方根を $\sqrt{n}$ と書くことによって、数の演算プロセスの厳密さを保つプランが提示されたのである。

しかしながら『テアイテトス』の記述は不自然である。テアイテトスは自乗数ではない数の平方根は無理数になることを認識しているのである。ところが調べられているのは $\sqrt{17}$ までである。$\sqrt{n}$ 問題を中途半端にしたままにしないで、片付けるのが先ではないか?

テオドロスの証明法は $\sqrt{n}$ 問題の見通しを与えるようなものだったと考えられる。複雑になりすぎてギブアップしたなどというようなものではなかったはずである。幾つかの著書の中でギブアッフしたことになっているのは、

---

[12] ところがヴェルデン [9] もこの和訳と同じ解釈に立っている。版による違いかも知れない。
[13] (a) Hardy and Wright[17] p.42; (b) ヴェルデン [9] p.192; (c) ヒース [10] p.107, p.146
[14] このテーマに関する 2012 年までの研究状況は Negrepontis[24] に詳しく纏められている。
[15] 例えばヴェルデンは $\sqrt{17}$ までがテオドロス、一般的な証明はテアイテトスとしている [9]。

彼らの推測した証明法に問題があると考えざるを得ない。そこで本論考では新しい証明法を提示する。また筆者は $\sqrt{n}$ 問題はテオドロス自身によって解決されたと信じている。その根拠について (推測の域を出ないが) 説明を付加したい。

以下に本論考で使用されている記法について意味を示しておく。

記法	意味
$a \mid b$	a は b を割り切る。同じことだが、b は a の倍数である
$a \nmid b$	a は b を割り切らない。同じことだが、b は a の倍数ではない

2　$\sqrt{2}$ 問題

$\sqrt{2}$ が無理数である (つまり分数では表せない) ことの証明は、通常は次のように行っている:
$\sqrt{2}$ が仮に a/b (a,b は自然数) と書けるものなら既約な a,b の対が存在するはずで

$$a^2 = 2b^2 \tag{1}$$

従って a は 2 の倍数である (なぜなら a が奇数なら a^2 も奇数になるから)。これを $2k$ と置いて

$$2k^2 = b^2$$

となる。従って b もまた 2 の倍数となり、a,b を既約とした前提に反する。

ここに述べた証明法は数式を知っている現代の我々にとっては易しくても、数式を知らない当時の数学者にとっては難しい (見通しが立ちにくい) のである。もっと易しい証明法はないであろうか?

当時の彼らの道具立てで可能なことを考えてみる。彼らは数式を知らないので、図形を描きなから推論を進めて行ったと言われている。偶数・奇数の概念は昔からかなりポピュラーなので、偶数の自乗は偶数になり、奇数の自

乗は奇数になることは経験的に (数学者であれば常識として) 分かっていたと思える。そして、このことは容易に証明できる。

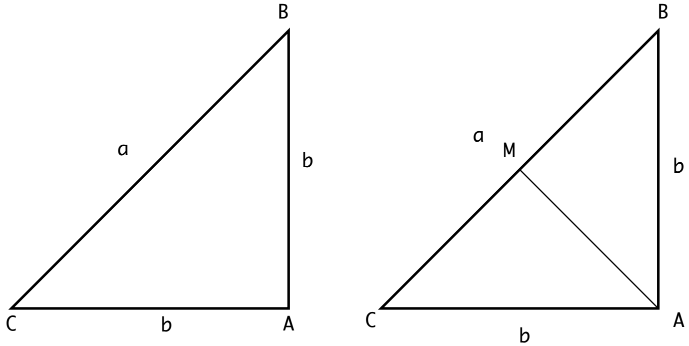

図 1: 直角二等辺三角形

まず最初に考えられる初等的なアプローチは図 1 左の直角二等辺三角形であろう。仮に、全ての辺の長さが自然数で表される直角二等辺三角形が存在するとする。そのようなものの中で 一番小さなものを選ぶ [16]。

ここに a, b は自然数である。ピタゴラスの定理によって、a^2 (当時のギリシャ人の言葉で言えば、辺 BC を辺とする正方形の面積) は偶数であるから、a は偶数のはずである (なぜなら a が奇数なら a^2 は奇数になるから)。ならば BC の中点を M としたとき (図 1 右)、MC は自然数である。三角形 ACM は直角二等辺三角形であり、全ての辺が自然数で表され、一番小さいと仮定した直角二等辺三角形 ABC よりも小さい。このことは最初の仮定に反する。

現在、本や Web 上にある幾何学的証明は HEATH[13] に由来するものが多い [17]。なお背理法自体は古代ギリシャにとってはかなりポピュラーな論法であったはずである。(背理法は当時の哲学者が好んで使った論法である)

しかし、さらに分割を続け、無限に分割できることを根拠としているもの

16「一番小さなもの」との言い方をしたのは「既約」の概念を必要としないからである。そして、この方法での定理の証明には「一番小さなもの」の方が分かりやすい。

17例えば Hardy[17]。

が見られる。この発想はユークリッドの互除法 (あるいは連分数展開法) に基づいて無理数性を主張していることから来ている[18]。しかし、筆者の論理展開を見れば分かるように、そのような高度な知識は必要とされない。

直角 2 等辺三角形に基づいた、この証明法の欠点は $\sqrt{3}$ への拡張が困難な点にある。原因はピタゴラスの定理を証明の中で使うことにあるように思える。

3 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{17}$ 問題

以下にピタゴラスの定理を使わない証明法を述べる。初等的な証明法故、これはまたテオドロスが辿った道であったろうと筆者は信じる。

『テアイテトス』をよく読めば分かるように、テオドロスは彼の生徒たち (年齢で言えば現在の高校生程度であろうか?) を相手に無理数の問題を講義して、テアイテトスはその内容をプラトンに説明しているのである。(『テアイテトス』では「ソクラテス」を対話の相手にしているが、実際にはプラトンと考えるべきであろう)

テオドロスはいきなり $\sqrt{3}$ から講義を始めたとは考え難い。予備知識として $\sqrt{2}$ の話を済ませていたと考えるべきである。無理数の存在は当時の数学にとって特別の意義を持っているので、そのために 1 回分の講義時間を費やしたとしても不思議ではない。$\sqrt{3}$ 以下の話はその後に続く他の日の講義だろうと考えられる。テアイテトスがプラトンに $\sqrt{2}$ の話をしなかったのは、$\sqrt{2}$ の無理数性の問題はプラトンは既に知っており、持ち出す必要はないと判断したのだろう。

講義の相手は少年たちであり、しかも教育環境は現代に比べて極めて悪い。テキストはもちろん、プリントも与えられない時代である。優秀な少年たちであったとしても、十分に初等的で、しかも直感的にも理解しやすい方法でなくてはならないであろう。直角 2 等辺三角形から出発する証明法は伝統的な方法であったと考えられので[19]、この方法も教えたであろうが、しかし $\sqrt{3}$

[18]『原論』第 10 巻、命題 2,3 は実数に対するユークリッドの互除法である。

[19]プラトンはしばしば $\sqrt{2}$ に関係するテーマを話題にするが、直角二等辺三角形を基にしている。例えば『メノン』

問題へ続かない。テオドロスは $\sqrt{2}$ 問題の新しいアプローチ、すなわち $\sqrt{3}$ 問題に拡張可能な証明法をテアイテトスたちに披露したと考えられる。

もちろん、テオドロスは講義を行うずっと以前に証明を仕上げていたはずである。『テアイテトス』に出てくるテオドロスは老齢に差し掛かっているので、それは 10 年以上も前のことだったかも知れない。テオドロスが実際にどのように証明したかは、もはや推測の域を出ない。以下は考えられる証明法の一つである。

発想を変えてみる。$\sqrt{2}$ 問題は、面積が 2 倍の関係にある正方形を、辺の大きさが自然数と言う制約の下で見つける問題でもある (図 2)。

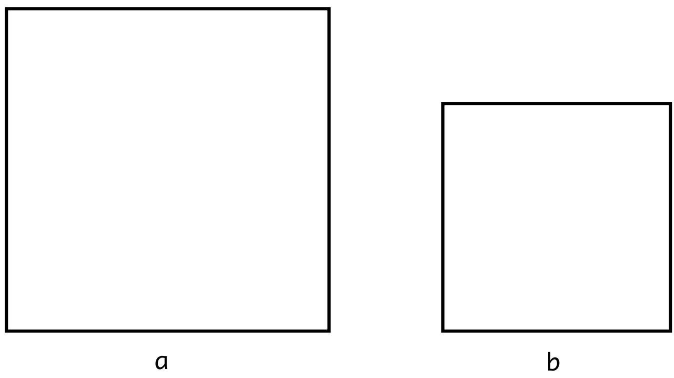

図 2: 左の正方形の面積が右の 2 倍

背理法を使う。仮に見つかったとする。その中で一番小さな自然数の組を (a, b) とする ($a^2 = 2b^2$)。

a^2 は偶数だから、a も偶数である (なぜなら a も奇数なら a^2 も奇数になる)。従って左の正方形は中央で 4 分割できて (図 3)、当初の仮定に反して面積が $2:1$ の関係にある (a, b) の組より小さな組 $(b, a/2)$ が存在することになる。

この方法だと容易に $\sqrt{3}$ 問題に拡張可能である。面積が $3:1$ の 2 つの正方形を並べて書けば良いだけだから...

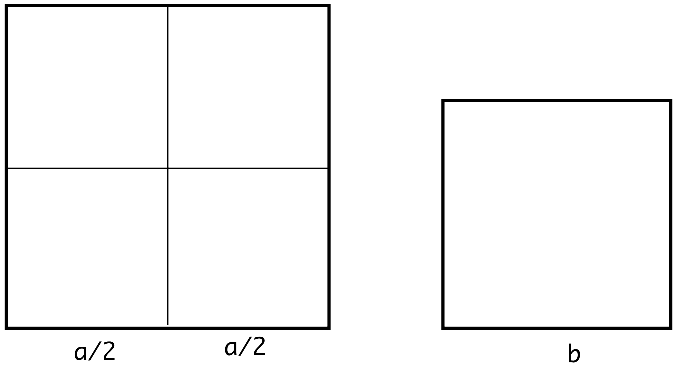

図 3: 左の正方形の 1/4 の面積が右の 1/2

これらの 1 辺を a と b とする。一番小さな組としてよい。a^2 は 3 の倍数である。現代の我々であれば、このことから直ちに a は 3 の倍数であると結論するであろう。我々は a^2 が 3 の倍数であれば a も 3 の倍数であるであることを知っているから...

彼らは数字大好きな連中である。経験的事実としては、我々と同じ認識でいたはずである。もしも、後に述べる命題 VII.30 を証明に使って良いならば、$\sqrt{3}$ だけではなく、$\sqrt{p}$ (p は素数) についても (背理法によって) 直ちに無理数であると結論したであろう。しかし、そうはしなかったところが素晴らしい。

テアイテトスは、テオドロスが $\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$,...,$\sqrt{17}$ まで順に証明したと説明している。このことは、命題 VII.30 に頼らないで $\sqrt{3}$ が無理数であることをテオドロスが証明したことを意味する。つまり

$$a^2 \text{ は 3 の倍数} \qquad \Rightarrow \qquad a \text{ は 3 の倍数}$$

あるいは (同じことであるが)

$$a \text{ は 3 の倍数ではない} \qquad \Rightarrow \qquad a^2 \text{ は 3 の倍数ではない}$$

が正しいことを証明した。

どのように証明したか? 偶奇の問題を素直に拡張したと考えるのが自然である。k を自然数とするとき、

- $(3k+1)^2$ を 3 で割ると 1 余る
- $(3k+2)^2$ を 3 で割ると 1 余る

現代の我々であれば式を変形して証明する。しかし彼らは図形を補助的に使ったであろう。どのような図形を描いたか? 考えられるのは図 4 である。これだと式を展開する必要はなく、1 及び 4 を 3 で割れば済む。

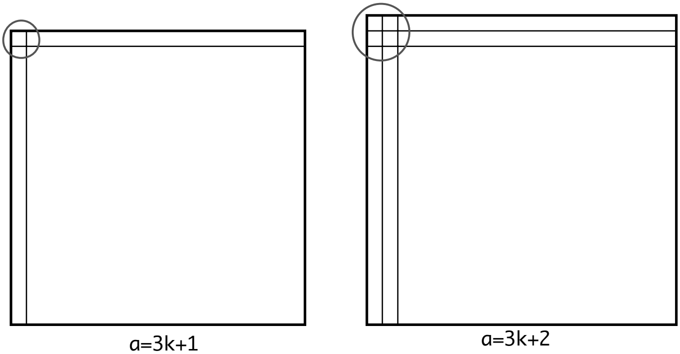

図 4: a^2 を 3 で割った剰余

$\sqrt{5}$ の場合には

$$a \text{ は 5 の倍数ではない} \qquad \Rightarrow \qquad a^2 \text{ は 5 の倍数ではない}$$

を示せば済むのであるが、確認に必要なのは 1^2,2^2,3^2,4^2 を 5 で割った剰余だけである。これも容易にクリアされていく。

テアイテトスの説明からはテオドロスが $\sqrt{6}$ を調べたか否かは分からない。しかし、これだけの成功を収めて $\sqrt{6}$ に手を付けなかったとは考え難い。

参考のために $n = 2, .., 17$ の範囲で

$$k^2 \bmod n \qquad (k = 1, .., n-1)$$

の結果を載せておく。最初の列が n の値で、それに対する計算結果が同じ行に表示されている。(ここに mod とは割り算の剰余を意味する演算子である)

2:　1

3:	1	1														
4:	1	0	1													
5:	1	4	4	1												
6:	1	4	3	4	1											
7:	1	4	2	2	4	1										
8:	1	4	1	0	1	4	1									
9:	1	4	0	7	7	0	4	1								
10:	1	4	9	6	5	6	9	4	1							
11:	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1						
12:	1	4	9	4	1	0	1	4	9	4	1					
13:	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1				
14:	1	4	9	2	11	8	7	8	11	2	9	4	1			
15:	1	4	9	1	10	6	4	4	6	10	1	9	4	1		
16:	1	4	9	0	9	4	1	0	1	4	9	0	9	4	1	
17:	1	4	9	16	8	2	15	13	13	15	2	8	16	9	4	1

ここから、$n = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17$ (これらは自乗数が含まれない数であることに注意しよう) に対して、$\sqrt{n}$ が無理数になることが証明される。

テオドロスは $n = 8, 12$ をどのように処理したか? $n = 12$ を例に取ると

$$a^2 = 12b^2$$

を扱うことになる。これは

$$a^2 = 3(2b)^2$$

となる。そして、これを満たす自然数解の組 (a,2b) は存在しない。つまり、n に自乗数が含まれる場合は、同じ論法を適用したと考えられる。

テオドロスは何故 $n = 17$ で止めたのだろうか?「もう見通しは立った。このなの続けても意味がない!」と考えたのでしょうね...

現代の我々であれば、コンピュータを使えば、この程度の計算は (プログラミング時間を含めて)10 分もあれば足りる。完全手計算であっても (アラビア数字のお陰で)1 日もあれば充分であろう。ギリシャ人はアラビア数字を持た

なかったので、手計算は大変であったろう。しかし簡単な計算の道具は持っていたのではないかと思われる。このケースでは小石をマス目に並べれば足りるのだから [20]。

テオドロスはこの後、何をしたか? 当然、一般的な証明に進んだでしょうね。そして証明に成功したと考える。つまり n が平方数ではない場合には

$$a^2 = nb^2 \tag{2}$$

は自然数解 a, b の組を持たない。

テオドロスはテアイテトスたちに $n = 17$ まで証明した後、何を話したか? テオドロスは一般的な n についての証明を持っていたが、相手を考えて結果だけを話した。(教育的配慮である。一般的な証明は難しすぎる)

4　ユークリッドの『原論』

『原論』は全 13 巻から構成され、300BC 頃にユークリッドが編纂したと言われている [21]。読めば分かるように、かなりパッチワーク的で、個性の異なる多数の数学者たちの成果が (大きな修正を受けないで) 盛り込まれていると考えられる [22]。また『原論』の中には一切の人名が含まれていないので、誰がどの部分に寄与したのかは分からない [23]。

命題 VII.30　a, b を自然数、p を素数とすると

$$p \mid ab \qquad \Rightarrow \qquad p \mid a \quad \text{or} \quad p \mid b$$

[20]小石を使わなくても、自乗数の列 $(1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...)$ は、奇数列 $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...)$ を加える事によって次々に得られる。テオドロスは、この程度のことは知っていたはずである。

[21]ユークリッドが編纂したとする明示的な資料はないものの、アルキメデス (ユークリッドと同時代) やアポロニウス (200BC 頃) が、原論に述べられている命題とユークリッドを結びつけている [14]。従って編纂者として関わった可能性は高い)。

[22]これは現在の一般的な見方である。斎藤氏の『原論』には命題ごとに丁寧な解説が添えられ、継ぎ接ぎな部分や、ユークリッド以降の追加と見られる命題が分かるようになっている。

[23]後世の人による注釈の中には人名が現れる。そうでなくても部分的には推測が可能である。他の資料、例えばプラトンの『テアイテトス』と『原論』を突き合わせることによって、第 10 巻はテアイテトスによると推測されている。

これから直ちに ($b = a$ の特殊ケースとして)

$$p \mid a^2 \qquad \Rightarrow \qquad p \mid a$$

が得られる。

さてサボー[18] には次のように書かれている:

> B.L. ファン・デル・ワルデンは、ユークリッドの『原論』第 VII 巻の最初の 36 個の定理が紀元前 400 年以前、すなわち前 5 世紀に、ピタゴラス学派の或る数学的著作の中にまとめられたものであり、かつ本質的な変化は何も受けないで継承されたものであることを、確かめるのに成功した。

最初の 36 個の定理の中には、この命題 VII.30 が含まれている。テオドロスが、この著書 (「或る数学的著作」) を読んでいたとすれば、あの『テアイテトス』は何だったのか? テオドロスは素数に関する定理をテアイテトスにまず教えて、$\sqrt{n}$ 問題を解説するのが筋道ではないか?

サポーの記事に関連した記述は村田氏の記事にもある[19]:

> まず問題の第 7 巻であるが，この本の主題は，整数の比，倍数・約数，公倍数・公約数，互いに素な二数など，一口にいうと初等整数論の入門書のような体裁をなしている。ファン・デア・ワルデンはこれを，ピタゴラス学派の数論の基礎であり，かつその音楽論のまとめであると推定し，しかもその論理の運びが簡潔でよくまとまっているにもかかわらず，表現が古風でまわりくどい事などを考え合せ，何十年かにわたる彫琢を経た古いピタゴラス学派の教科書ではあるまいかと推定している。また特にアルキュタスが前記の定理 B を証明するのにこれを用いている有様を示して，アルキュタスの時代にその本は既にほぼ今の形に完成していたものであり，ユークリッドの『原論』の中にもあまり大きな変化なしに取り入れられたものであろうと述べている。

「ピタゴラス学派の教科書」とは何か? ヴェルデン[24] は『数学の黎明』の中で、教科書が存在したことを当時の文献に基づいて推測している[25]。筆者は当然に存在したはずだと考える。なぜなら彼らはピタゴラスの死後、地中海各地に分散し、その中で研究成果を共有することが求められていたのである。数学のように完全積み上げ式の学問では過去の成果が共有されないと研究仲間に成果を示すことも弟子を育成することも困難になる。彼らの研究成果を積み上げたテキストこそが彼らの財産であり、彼らの経典でもある。この維持発展のために最大の努力が払われたはずだと考える。

テオドロスはピタゴラス派の著名な幾何学者であったという。ピタゴラス派の標準テキストが存在すれば、テオドロスは読んでいたはずである。可能な解釈は次のようなものであろう:
テオドロスが $\sqrt{n}$ 問題を手掛けた時点 (まだ気力が充実していた頃) では、標準テキストの中には命題 VII.30 に相当する命題が存在せず、テオドロスが $\sqrt{17}$ まで証明した後に、一般的な証明を追求した (追求しないわけがない)。そして彼は素数による自然数の整除に関する幾つかの命題 (『原論 VII』命題 23 から命題 30 に相当する部分) を標準テキストに追加した。

この解釈は既存の研究との関係ではどうなのであろうか? ヴェルデンは『原論』第 8 巻はアルキュタスによると推測している [9]。その上でヴェルデンは第 8 巻の証明の中で利用されている第 7 巻の命題を詳細に分析し、アルキュタスの頃には第 7 巻が現在の形に完成していたと結論している [9]。アルキュタスは 430BC 頃の生まれであり [19]、テオドロスよりも 30 歳程若い。テオドロスの成果がやがて (10 年程見ておけば良いだろう) アルキュタスにも伝わったと考えればヴェルデンの分析とは矛盾しないことになる。

では式 (2) はテオドロスは証明しなかったのか? 証明していれば『原論』の中にその痕跡はあるはずである。

[24]Van Der Waerden は現代の第一級の数学者である。他方では数学史の分野でも名高い。彼の名前をカタカナで表記する場合、数学の分野の人は「ファン・デル・ヴェルデン」と書く。他方、数学史の人は他の書き方をする。ここでは引用文を除いて「ヴェルデン」で統一している。
[25]ヴェルデン [9] p.147

命題 VIII.22: $a:b=b:c$ かつ a が平方数ならば、c も平方数である

つまり、$ac=b^2$ である。そこで次の置き換えを行う: $(a,b,c)\to(b^2,a,n)$ すると式 (2) を得る。つまり式 (2) が解を持つなら n は平方数でなくてはならないことが主張される。しかしこれはあまりにも間接的ではないか...

5 $\sqrt{\mathrm{n}}$ 問題

ここでは研究者としてのテオドロスの行動について推測してみる [26]。彼の時代には 2 つの大きな話題があった。

一つは無理数の発見である。この発見によって、ピタゴラス教団の教義の根幹が崩れただけではなく、幾何学の土台も崩れたのである。当時の比例の概念は『原論』第 7 巻と同じものだと考えられている。ここでは比例関係は自然数によって定義されている [27] 。実数に対しても適用可能な定義は『原論』第 5 巻で行われているが、この巻は天才エウドクソス (390BC-337BC) を待たなければならなかった。当時の幾何学における三角形の相似の定義は『原論』第 6 巻に見られるようなもの、すなわち一つの角と、その角を挟む 2 辺を使って定義されていた考えられる。相似比を整数だけを使って (これは有理数の範囲でと言うのと同じである) 定義している以上、よく知られた、またよく利用される相似条件、すなわち「2 つの角が等しい 2 つの三角形は相似である」が出てこない。こうなると幾何学の相似図形に関する命題の殆どが崩壊である。

もう一つはヒポクラテスによる比例中項の発見である。テオドロスと同時代の著名な数学者にはヒポクラテス (医者のヒポクラテスではない) が居た。彼の発見は当時の有名な幾何学の問題 (立方体の倍積問題) を解決に導くかも知れないとして、数学者にとってホットな話題であったと思われる [28]。

[26] 教師としてどのように生徒に説明したかと言う問題と、研究者としてどのように研究したかと言う問題は分けて考える必要がある。例えば今日でも自然数の素因数分解の証明は義務教育のレベルでは省かれるが、概念は幾つかの例示を基に説明される。『テアイテトス』の話は、(テオドロス自身が完全に分かっていたとしても) 教育用の特別メニューであったと考えるべきであろう。

[27] a,b を長さとすると $a:b=m:n$ となる自然数 m,n の組が存在すると仮定されていた。言い換えれば、b を n 個に分割し、その m 個分が a であるとして $a:b$ の意味を解釈していたのである。

[28] 『原論』第 8 巻は比例中項に関する理論である。このことからも「比例中項」の重要性を窺い知ることができる。

そこでテオドロスが話題の比例中項の問題にどのようにアプローチしたのか推測してみよう。図 5 に最も簡単な比例中項問題を示す。この図は比例中項の概念に出会った当時の数学者が誰もが描いたはずである。

比例中項とは 2 数 a, b を与え、そのもとで得られる数の列 $c_1, c_2, ..., c_k$ で、条件

$$a : c_1 = c_1 : c_2 = ... = c_{k-1} : c_k = c_k : b$$

を満たすものである。この場合、a と b の間に、k 個の比例中項が落ちると言う。特に $k = 1$ の場合には $a : c = c : b$ で、幾何学的には図 5 で示される。図において三角形 ABC は、角 BAC が直角で、H は頂点 A から辺 BC への垂線の交点である。BH,CH,AH の長さを各々 a, b, c とする。

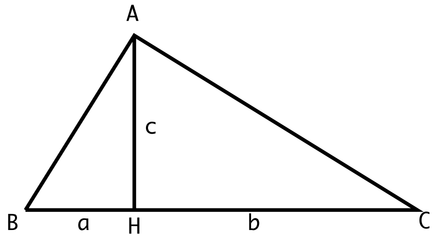

図 5: 最も簡単な比例中項問題

ヒポクラテスは素朴にも [29] 図の a, b, c を比の中に持ち込んでいるが、それは彼がピタゴラスの学徒ではないからであろう [30]。『原論』に見られるピタゴラス派の態度では、それが可能であることを確認しながら議論を進めるのである。特に、$\sqrt{2}$ 問題が発見されていればなおさらのことである。

[29]厳密に言えばヒポクラテスの頃には長さに対して適用できる比の理論は存在しなかった。ヒポクラテスは類似の素朴さを月型の面積の計算に対しても見せている。Knorr[25] も後者の点について同様な指摘をしている。しかし、ヒポクラテスの名誉のために言おう。数学者には 2 種のタイプが居る。基礎を重視するタイプ (テアイテトスやエウドクソスそして多分テオドロスもこのタイプ) と応用を重視するタイプ (ヒポクラテスやアルキュタスがこのタイプ) である。彼らはそれぞれ良い仕事をしているのである。前者は地味で、後者は華々しいが...

[30]Wikipedia “Hippocrates of Chios” には “para-Pythagorean” とされている。多分独学である。

テオドロスは、適当な長さの単位のもとで a, b, c が全て自然数となる条件について考えたと思われる。なぜなら、これが定義に忠実なピタゴラス派のとるべき態度であるから。従って以下では a, b, c を全て自然数とする。

特に条件付けられていない場合には a, c, b を単純に $a : c = c : b$ で選べばよい。例えば $(a, c, b) = (1, 2, 4)$、$(a, c, b) = (4, 6, 9)$ などである。

a, c の比を任意に与えて、その下で条件を満たす a, c, b は次のように得る: $a : c = 2 : 3$ とすると $a : c : b = 2 : 3 : 9/2$ である。これから分母を払って $a : c : b = 4 : 6 : 9$ を得る。このケースでは難しくはないし、また面白くもない。

$a : b$ の比を任意に与えて、その下で条件を満たす a, c, b を求める。この答えは難しい。『原論』第 8 巻は、これを一般化した問題の解法に捧げられている。

$a : c = c : b$ の条件から、或る自然数 M, N の組 (既約と仮定してよい) に対して、

$$\begin{aligned} a : c &= M : N \\ c : b &= M : N \end{aligned}$$

である。これから

$$\begin{aligned} a : c &= M^2 : MN \\ c : b &= MN : N^2 \end{aligned}$$

が得られる。すなわち

$$a : c : b = M^2 : MN : N^2 \tag{3}$$

従って k を自然数とすると

$$a = kM^2, \quad c = kMN, \quad b = kN^2 \tag{4}$$

これが付加条件の無い場合の一般解である。なお、式 (3) から式 (4) を導く証明を示しておく:

証明　M, N が既約であれば、M^2, N^2 もまた既約である (VII.27)。その場合、$a : b = M^2 : N^2$ において

$$a = kM^2 \quad \text{and} \quad b = kN^2$$

となる自然数 k が存在する (VII20,22)。これと $c^2 = ab$ の関係 (VII19) より、式 (4) を得る [31]。

付加条件 $a : b$ が与えられたとする。その場合 $a : b = M^2 : N^2$ となる M, N の存在条件と、存在する場合の M, N を求めることになる。付加条件 a, b において a, b が既約であれば $k = 1$ である。従って

$$a = M^2 \quad \text{and} \quad b = N^2 \tag{5}$$

としてよい。例えば $(a, b) = (1, 2)$ としてみると、$M = 1$ となるが、N については $N^2 = 2$ となる N は存在しないので、$1 : 2 = M^2 : N^2$ となる M, N の組は存在しないことになる。

つまり我々は $\sqrt{2}$ 問題のもう一つの解法を得たのである。これと式 (1) を比較してみると優劣は明らかである。式 (1) は 2 つの未知数が関係しているので直ちには分からない。他方 $N^2 = 2$ の場合、問題の未知数はたったひとつであり、存在しないことは自明である。

以上の考察は次のように一般化できる。a と b が互いに素として $a : b = M^2 : N^2$ となる M, N が存在するためには、a, b 共に平方数でなくてはならない。

式 (2) と比較しやすいように記号を置き換えてみる: $(a, b, M, N) \to (m, n, b, a)$ すると次の式を得る。

$$ma^2 = nb^2 \tag{6}$$

これが自然数解 a, b を持つ条件は、m, n が共に平方数になることである。$m = 1$ とすると式 (2) に還元するので、式 (6) は式 (2) よりも遥かに強力である。

[31]『原論』との関係では、VII19,20,22,27 を導くまでの隠れた依存関係がある。それについては第 8 巻との依存関係を調べたヴェルデンの研究が参考になる [9]。VII 定義 20、VII の命題 1,2,4-18,21,24,24,26 が陰に依存している。従って、ほぼ第 7 巻の全体が利用されていると考えてよい。

以上は、図 5 から出発する限り、ほぼ必然的な流れである。テオドロスにとっては難しくはなかったであろう。テオドロスがこの道を辿ったなら、『原論』第 8 巻にその痕跡があるはずである。この巻には以下の命題がある。

命題 8 比例式 $a : b = c : d$ において、c と d の間に k 個の比例中項が落ちるならば、a と b の間にも k 個の比例中項が落ちる

命題 9 もし a と b が互いに素であり、その間に k 個の比例中項が落ちるならば、1 と a および 1 と b の間にも k 個の比例中項が落ちる

今の場合は $k = 1$ である。この場合には a も b も平方数となる。

以上に見たように、平方根問題の一般的証明は、テアイテトスの『原論』第 10 巻を待つまでもなく、『原論』第 8 巻で既に成功している [32]。では第 8 巻は誰によって書かれたか?

ヴェルデンは、『数学の黎明』において、『原論』第 8 巻の大部分はアルキュタスによるとしている。彼はテオドロスよりも 30 歳程若いピタゴラス学派の数学者である。ヴェルデンはアルキュタスを評して言う:

> 一方に天才的な着想、独創的な想像力、幾何学的方法への精通がある反面、他方では論理性の欠如、言わんとすることを正確明晰に表現する能力の不足、思考上の誤り、まわりくどさなどがあることである。

『原論』第 8 巻は確かに読みづらい。しかし、敢えてアルキュタスを弁護しよう。読みづらくしている以下の問題を考慮しないといけない:

- 「任意個」の問題は、今日では数学的帰納法を使う。しかし彼らは数学的帰納法を知らないので、「証明」が綺麗ではないし、完全でもない。
- 比例関係を扱うのに分数を使わない。 少数の比例関係ならともかく、第 8 巻では多数の比例関係を扱うので、ゴタゴタする。

[32] 第 8 巻では (今風に言えば) $\sqrt[k]{m/n}$ $(k > 1)$ の問題が解決されている。

- 当時は、べき乗の概念も、表現法もない。もちろん数式はない。このことは、特に (暗にべき乗を問題にしている) 第 8 巻では理解を困難にする。

今日であれば、式 (4) で示されるような、解の構造を明らかにしながら、議論が進められるだろう。しかし、この構造を示す適切な表現法が存在しないのである。

論理的な問題が発生するのは、アルキュタスが第 8 巻を書いたときに、既に第 8 巻の原型が存在し、アルキュタスはそれに彼の理論を無理に被せたからではないかと考えられる。もとの第 8 巻は比例中項が 1 個あるいは 2 個の場合だけを扱っていたのではないだろうか。アルキュタスは数個の連鎖の中に、任意個の長さの連鎖を見ることのできた人なのであろう。しかし彼がイメージする複雑な世界を表現する言葉を当時の数学は持っていなかったのである。第 8 巻の原型? もちろんテオドロスを筆者は想像している。

6　プラトンとテオドロス

『テアイテトス』を見るにプラトンはテアイテトスの構想を直ちに賞賛している。このことをどう解釈したらよいのか? プラトンは $\sqrt{n}$ は n が平方数でない場合には無理数になることを既に知っていたのではないか? そして厳格派のプラトンは n が平方数でない場合には、$\sqrt{n}$ はそのまま残すべきであることを既に考えていたのではないだろうか?

『テアイテトス』によるとプラトンがテオドロスを訪ねたのは、プロタゴラスの説を批判する前に、プロタゴラスの説をよく知るテオドロスを相手に議論をしたかったからである[33]。プラトンは、真理の相対化に繋がるプロタゴラスの説 (「万物の尺度は人間である」) を許せなかった。プラトンはテオドロスに言う:「図形については、果たしてあなたが尺度でなければならんか

[33] テオドロスはプロタゴラス (Wikipedia “Protagoras” によると 490BC 頃-420BC 頃) の友人である。プラトンは味方が欲しかったのかも知れないし、あるいはプラトンの著作『プロタゴラス』の準備だったかも知れない。

どうか」[34]

『テアイテトス』を読む限りプラトンとテオドロスは旧知の間柄であったと考えるべきである。実際、二人の関係を調べてみるとかなり親しい間柄であったと思える[35]。プラトンは数学にも強い関心を抱いていたので、数学上の話題をテオドロスから伝え聞いていたと考えられる。そうであれば $\sqrt{n}$ 問題についても (テオドロスが関与していれば) 聞いていたとしても不思議ではない。

さてパズルの最後のピースがまだ埋められていない。テアイテトスは $\sqrt{n}$ 問題が解決済みであることを認識した上で[36]、数の理論を組み立て直すプランをプラトンに披露しているのである[37]。テアイテトスたちがテオドロスから $\sqrt{n}$ 問題の結論だけでも聞いていたのなら、テアイテトスはそのこともプラトンに説明したと思える。しかし『テアイテトス』にはその部分が欠落しているのである。その結果『テアイテトス』には不自然さが残っている。

どう解釈したらよいか? 『テアイテトス』は、プラトンがテアイテトスの戦死を知り、テアイテトスと出会った日の思い出を書いた本である。テアイテトスがテオドロスの仕事を紹介したのは、400BC 頃と思われる[38]。他方戦死したのは 369BC である。つまりプラトンが思い出しているのは 30 年以上も前の出来事である。さらにプラトンは数学者ではない。数学者の目で見たときに重要な部分が欠落していると考えてもおかしくはない。筆者がここで指摘した論理的な飛躍は誰も問題にしていないようである。プラトンにとっても重要ではなかったのかも知れない[39]。

---

34 『テアイテトス』[7] p.106

35 ヴェルデンはディオゲネスを基に「テオドロスはプラトンの師であった」と (ヴェルデン [9]p.185)、ディオゲネスは「プラトンがその講義を聞いた人」としている (ディオゲネス [21] p.204)

36 このことは $\sqrt{n}$ 問題は 400BC には解決済みであることを示している。従って $\sqrt{n}$ 問題はテアイテトスによって解かれたとする通説は誤りである。

37 この成果は『原論』第 10 巻である。$\sqrt{n}$ 問題の答えを既知のものとして書かれている。

38 『テアイテトス』[7] p.267

39 プラトンにとっては、テアイテトスに関する思い出の一つに過ぎないのであり、テオドロスの仕事を正確に伝える意図はなかったと考えるべきてあろう。

7 まとめ

古代ギリシャ数学の無理数の問題に関係して、以下の 3 つの新しい証明法を提示した。

(a) 直角二等辺三角形を基にした従来の $\sqrt{2}$ の証明法においては、説明が簡素化できること
(b) $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{17}$ の証明は、初等的な方法が可能であること
(c) 一般問題 $\sqrt{n}$ の証明は決して難しくはなく、『原論』第 8 巻に繋がる初等的な証明で足りること

この分野の議論を見るに、時代の制約を超えた高度な証明法を基に、論拠を展開している著作が多いように見える。平易な証明が可能であることが明らかになれば、また違った議論の展開になるのではないだろうか。

参考文献

[1] アレックス・ベロス (田沢恭子、対馬妙、松井信彦訳):『素晴らしき数学世界』(早川書房、2012)
[2] ジュリアン・ハヴィル (松浦俊輔):『無理数の話』(青土社、2012)
[3] ヴィクター J. カッツ (上野健爾、三浦伸夫訳):『数学の歴史』(共立出版、2005)
[4] 上垣渉:『初めて読む数学の歴史』 (ベレ出版、2006)
[5] E. マオール (伊里由美訳):『ピタゴラスの定理』(岩波書店、2008)
[6] Walter William Rouse Ball: "A Short Account of the History of Mathematics" (Cambridge University Press, 1915, archive.org)
[7] プラトン (田中美知太郎訳):『テアイテトス』 (岩波文庫、2014)
[8] Plato(translated by Benjamin Jowett): “THEAETETUS” `http://www.gutenberg.org/ebooks/1726.epub.images`
[9] ヴァン・デル・ウァルデン (村田全・佐藤勝造訳):『数学の黎明』 (みすず書房、1984)
[10] T.L. ヒース (平田寛、菊池、大沼訳):『ギリシャ数学史』 (共立出版、2006)
[11] T.L.Heath: “The Thirteen Books of Euclid’s Elements (Volume I)” (Cambridge University Press, 1908, archive.org)
[12] T.L.Heath: “The Thirteen Books of Euclid’s Elements (Volume II)” (Cambridge University Press, 1908, archive.org)

[13] T.L.Heath: “The Thirteen Books of Euclid’s Elements (Volume III)”
(Cambridge University Press, 1908, books.google.com)
[14] エウクレイデス (斎藤憲、三浦伸夫訳・解説):『エウクレイデス全集 (第 1 巻) 原論 I-VI』
(東京大学出版会、2008)
[15] エウクレイデス (斎藤憲訳, 解説):『エウクレイデス全集 (第 2 巻) 原論 VII-X』
(東京大学出版会、2015)
[16] EUCLIDIS (中村幸四郎、寺坂英孝、伊東俊太郎、池田美恵訳、解説):『ユークリッド原論』
(共立出版、2011)
[17] G.H.Hardy, E.M.Wright: “An Introduction to the Theory of Numbers”
(Oxford at the Clarendon Press, 1975)
[18] アルバット.K. サボー (伊藤俊太郎、中村幸四郎、村田全訳):『数学のあけぼの』
(東京図書、1977)
[19] 村田全:『数学史散策』(1974)
`http://fomalhautpsa.sakura.ne.jp/Science/Murata/ramble-hm.pdf`
[20] ディオゲネス・ラエルティオス (加来彰俊訳):『ギリシャ哲学者列伝 (上)』(岩波文庫、2013)
[21] ディオゲネス・ラエルティオス (加来彰俊訳):『ギリシャ哲学者列伝 (中)』(岩波文庫、1989)
[22] ディオゲネス・ラエルティオス (加来彰俊訳):『ギリシャ哲学者列伝 (下)』(岩波文庫、2014)
[23] Kurt von Frits: “The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum”
(Annals of Matheatics, Vol.48, No.2, 1945)
[24] S.Negrepontis, G.Tassopoulos: “On Theodorus’ lesson in the Theaetetus 147d-e”
(Athens University, 2012) `https://arxiv.org/abs/1205.6681`
[25] W.R.Knorr: “On The Early History of Axiomatics: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity” (Springer Nature, 1980, Pisa Conference Proceedings, Vol.I)
[26] 有澤健治: 古代ギリシャの数学
`http://ar.nyx.link/greek_math/index.html`