〔論　　説〕

四隣接正方領域を結ぶ交通網の最適利用とその効率

玉置　光司　　有澤　健治
神頭　広好　　相良　信子

1．はじめに

四つの領域A，B，C，Dはそれぞれ一辺の長さaの正方領域で，図1のような形で隣接している。従来，領域内，領域間の移動は徒歩に限定されていたが，各領域A，B，C，Dの中心を結ぶ鉄道（図1の太線）が新設され，領域間の移動にこの鉄道を利用することができるようになった。

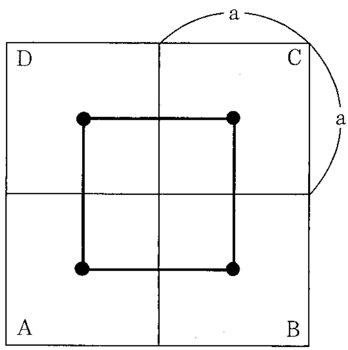


図1

本稿の目的は

（Q1）移動者（利用者）の出発地と到達地に依存して最適な移動手段を求めること

（Q2）鉄道の効率（徒歩だけの場合に比しての移動時間短縮の割合）を評価すること

である。これらの問に答えるため，以下の仮定を設ける。

（A 1）徒歩速度を1，鉄道の速度を v とする。ここでは簡単のため， $v > 2$ と仮定する。

（A 2）徒歩による移動距離の測定には rectilinear 距離を用いる。

（A 3）各領域の人口密度は一定で一様であり，移動も一様である。すなわち，毎回の移動において，出発地，到達地は各々独立にＡＢＣＤ上で一様に発生するものとする。

位置関係の対称性から，次の２つのケースを調べれば十分である。

ケース１：領域Ａから領域Ｂへ移動する場合

ケース２：領域Ａから領域Ｃへ移動する場合

２．最適移動手段

以降の議論においては，領域Ａの左端を座標原点に取り，横軸を x 軸，縦軸を y 軸とする。利用者の出発地，到達地を座標で表す時，それぞれを出発点，到達点と呼び，(x_1, y_1)，(x_2, y_2) で表す。（A 1）と（A 2）で仮定された rectilinear 距離より，この２点間の徒歩による移動時間は

$$|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

で与えられる。

ケース１の場合は既に三浦［1］，三浦，腰塚［2］により調べられているので，彼等の結果を定理にまとめておこう。この場合，移動手段は

W：出発点から到達点まで徒歩で移動する

R_{AB}：駅Ａから駅Ｂまで鉄道を利用する

の２つである。対称性より， $0 \leqq x_1 \leqq a$， $0 \leqq y_1 \leqq a/2$ の範囲で考えれば十分である。

定理１（領域Ａから領域Ｂへの移動）

［Ｉ］最適移動手段

領域Ａの出発点（x_1, y_1）と領域Ｂの到達点（x_2, y_2）に依存して最適な移動手段は図２のように５つの場合に分かれる。

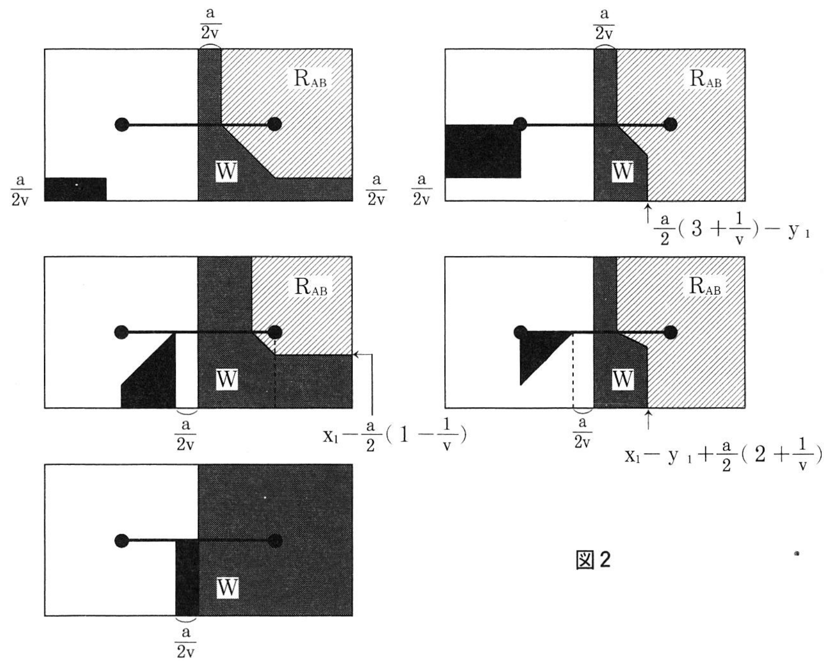


図２

［II］領域間平均移動時間

最適移動手段の下での領域Ａ，Ｂ間の平均移動時間$M_{AB}(v)$は次式で与えられる。

$$M_{AB}(v)=\left(\frac{109}{120}+\frac{73}{96v}-\frac{17}{48v^2}+\frac{1}{48v^4}-\frac{1}{480v^5}\right)a$$

また，鉄道の効率$E_{AB}(v)$は

$$E_{AB}(v)=\frac{M_{AB}(v)}{M_{AB}(1)}=\frac{3}{4}\left(\frac{109}{120}+\frac{73}{96v}-\frac{17}{48v^2}+\frac{1}{48v^4}-\frac{1}{480v^5}\right)$$

で与えられる。v→∞のときの極限は

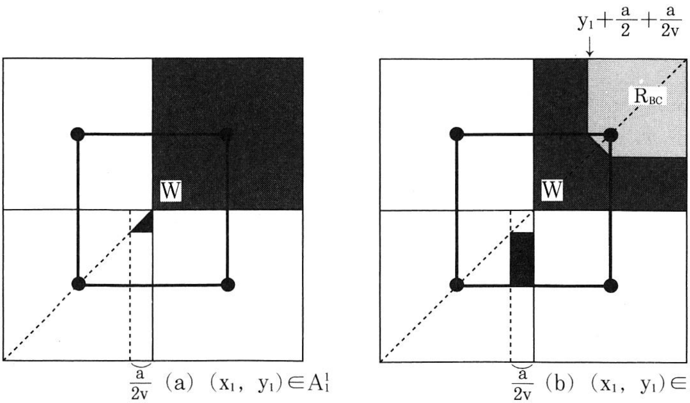
$$E_{AB}(\infty)=\lim_{v\to\infty}E_{AB}(v)=\frac{109}{160}=0.68125$$

本稿の主題であるケース2に移ろう。この場合は移動手段として，前述，W，R_{AB}の他にR_{AC}，R_{AD}，R_{BC}，R_{DC}が考えられる。たとえば，R_{AC}は駅Aから駅Cまで鉄道を利用することを意味していて，A-B-C，A-D-Cの2つのルートがあるが，どちらを利用しても所要時間は同じである。また，対称性から，出発点（x_1，y_1）としては$0\leqq y_1\leqq x_1$，$0\leqq x_1\leqq a$の範囲で考えれば十分であり，この場合，移動手段R_{DC}は明らかにR_{BC}より劣り，選択されない。すなわち，鉄道利用としてはR_{AB}，R_{AC}，R_{AD}，R_{BC}に限定してよい。ケース2の結果を，定理2にまとめる。

定理2（領域Aから領域Cへの移動）

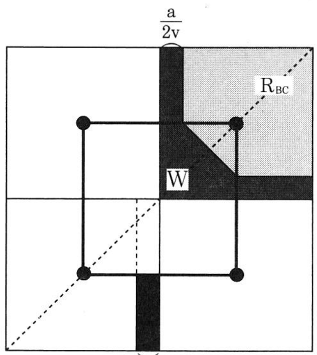
［Ⅰ］最適移動手段

領域Aの出発点（x_1，y_1）と領域Cの到達点（x_2，y_2）の両者に依存して最適な移動手段は図3のように7つの場合に分かれる。

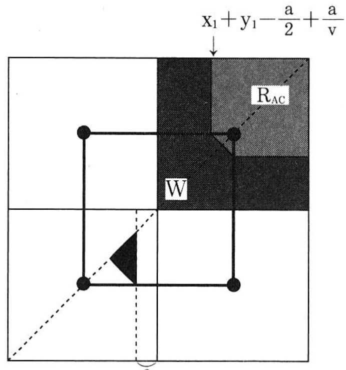


(a)（x_1，y_1）$\in A_1^1$　(b)（x_1，y_1）$\in A_2^1$

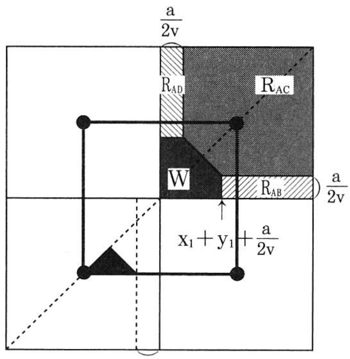
図3（a～b）



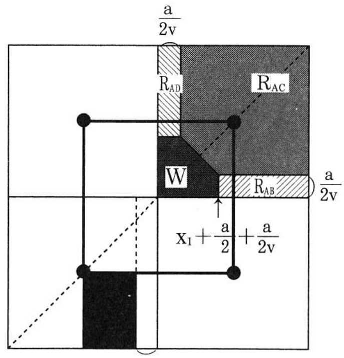
$\frac{a}{2v}$ (c) $(x_1,\ y_1) \in A_3^1$



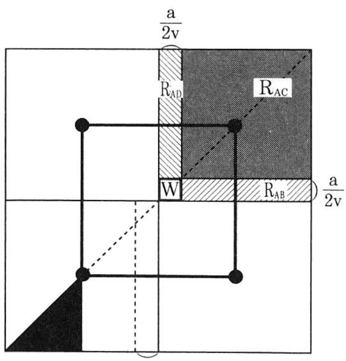
$\frac{a}{2v}$ (d) $(x_1,\ y_1) \in A_4^1$



$\frac{a}{2v}$ (e) $(x_1,\ y_1) \in A_5^1$



$\frac{a}{2v}$ (f) $(x_1,\ y_1) \in A_6^1$



$\frac{a}{2v}$ (g) $(x_1,\ y_1) \in A_7^1$

図3（c～g）

[II]領域間平均移動時間

最適移動手段の下での領域A，C間の平均移動時間$M_{AC}(v)$は次式で与えられる。

$$M_{AC}(v)=\left(\frac{234}{240}+\frac{89}{48v}-\frac{25}{24v^2}+\frac{1}{4v^3}-\frac{1}{24v^4}+\frac{1}{240v^5}\right)a$$

また，鉄道の効率$E_{AC}(v)$は

$$E_{AC}(v)=\frac{M_{AC}(v)}{M_{AC}(1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{234}{240}+\frac{89}{48v}-\frac{25}{24v^2}+\frac{1}{4v^3}-\frac{1}{24v^4}+\frac{1}{240v^5}\right)$$

で与えられる。$v\to\infty$のときの極限は

$$E_{AC}(\infty)=\lim_{v\to\infty}E_{AC}(v)=\frac{39}{80}=0.4875$$

証明　付録参照（[Ｉ]に関しては付録A，[II]に関しては付録B参照）

領域内の移動には鉄道は利用されないから，鉄道の効率が意味を持つのは領域間の移動に限られる。たとえば出発地が領域Aの点の場合，到達地が領域BあるいはDの点であれば効率は$E_{AB}(v)$であり，到達地が領域Cの点であれば効率は$E_{AC}(v)$である。したがって，定理１，２と仮定（Ａ３）より直ちに次の結果を得る。

定理3

鉄道の効率$E(v)$は次式で与えられる。

$$E(v)=\left(\frac{2}{3}\right)E_{AB}(v)+\left(\frac{1}{3}\right)E_{AC}(v)$$

特に，$v\to\infty$のとき

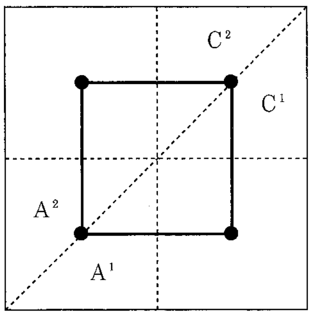
$$E(\infty)=\lim_{v\to\infty}E(v)=\frac{37}{60}=0.6167$$

付録A

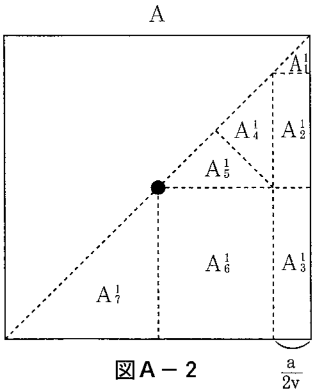
図A－1のように領域Aの右半分の三角形領域をA^1，左半分の三角形領域をA^2とする。領域Cについても同様にC^1，C^2を定義する。対称性より，出発点（x_1，y_1）はA^1の範囲で考えれば十分である。後の議論のために領域A^1を図A－2のようにA^1_1，A^1_2，A^1_3，A^1_4，A^1_5，A^1_6，A^1_7に分割する。ここで，A^1_4，A^1_5の境界となる直線は

$$y=-x+\frac{3a}{2}-\frac{a}{2v}$$

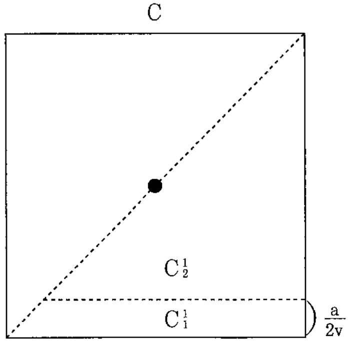
である。領域C^1については，図A－3のようにC^1_1とC^1_2に分割する。



図A－1



図A－2



図A－3

移動手段 W，R_{AB}，R_{AC}，R_{AD}，R_{BC}に対応して，その要所時間をそれぞれ$f_W(x_2, y_2 | x_1, y_1)$，$f_{AB}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$，$f_{AC}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$，$f_{AD}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$，$f_{BC}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$ と記すと，明らかに

(A.1) $f_W(x_2, y_2 | x_1, y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$

(A.2) $f_{AB}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$
$$= \left|\frac{a}{2} - x_1\right| + \left|\frac{a}{2} - y_1\right| + \frac{a}{v} + \left|\frac{3a}{2} - x_2\right| + \left(y_2 - \frac{a}{2}\right)$$

(A.3) $f_{AC}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$
$$= \left|\frac{a}{2} - x_1\right| + \left|\frac{a}{2} - y_1\right| + \frac{2a}{v} + \left|\frac{3a}{2} - x_2\right| + \left|\frac{3a}{2} - y_2\right|$$

(A.4) $f_{AD}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$
$$= \left|\frac{a}{2} - x_1\right| + \left|\frac{a}{2} - y_1\right| + \frac{a}{v} + \left(x_2 - \frac{a}{2}\right) + \left|\frac{3a}{2} - y_2\right|$$

(A.5) $f_{BC}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$
$$= \left(\frac{3a}{2} - x_1\right) + \left|\frac{a}{2} - y_1\right| + \frac{a}{v} + \left|\frac{3a}{2} - x_2\right| + \left|\frac{3a}{2} - y_2\right|$$

ただし，$(x_1, y_1) \in A^1$，$(x_2, y_2) \in C$。

出発点（x_1, y_1），到達点（x_2, y_2）の時，たとえば，2つの移動手段R_{AC}とR_{BC}を比較してR_{AC}の方がR_{BC}よりも望ましい場合，これを選好順序関係$\succsim$を用いて$R_{AC} \succsim R_{BC}$で表す。
これは，換言すれば

$$f_{AC}(x_2, y_2 | x_1, y_1) \leqq f_{BC}(x_2, y_2 | x_1, y_1)$$

という関係を表している。

補題1（R_{AB}とR_{AD}の比較）

(i) $(x_1, y_1) \in A^1$，$(x_2, y_2) \in C^1$の場合

$$R_{AB} \succsim R_{AD}$$

(ii) $(x_1, y_1) \in A^1$，$(x_2, y_2) \in C^2$の場合

$$R_{AD} \succsim R_{AB}$$

証明　（A．2），（A．4）より明らか。

補題2　（R_{AC}とR_{BC}の比較）

(i)　$(x_1, y_1) \in A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_3^1$，$(x_2, y_2) \in C$の場合

$$R_{BC} \gtrsim R_{AC}$$

(ii)　$(x_1, y_1) \in A_4^1 \cup A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1$，$(x_2, y_2) \in C$の場合

$$R_{AC} \gtrsim R_{BC}$$

証明　（A．3），（A．5）より明らか。

補題1，2より直ちに次を得る。

補題3

(i)　$(x_1, y_1) \in A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_3^1$，$(x_2, y_2) \in C^1$の場合

最適移動手段は，W，R_{AB}，R_{BC}の3つに限定される。

(ii)　$(x_1, y_1) \in A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_3^1$，$(x_2, y_2) \in C^2$の場合

最適移動手段は，W，R_{AD}，R_{BC}の3つに限定される。

(iii)　$(x_1, y_1) \in A_4^1 \cup A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1$，$(x_2, y_2) \in C^1$の場合

最適移動手段は，W，R_{AB}，R_{AC}の3つに限定される。

(iv)　$(x_1, y_1) \in A_4^1 \cup A_5^1 \cup A_6^1 \cup A_7^1$，$(x_2, y_2) \in C^2$の場合

最適移動手段は，W，R_{AD}，R_{AC}の3つに限定される。

補題3の(i)，(ii)は移動手段がさらに限定される。

補題4

$(x_1, y_1) \in A_1^1 \cup A_2^1 \cup A_3^1$，$(x_2, y_2) \in C$の場合，最適移動手段は，W，$R_{BC}$の2つに限定される。

証明　次の2つの事柄を示せば十分である。

$(x_2,\ y_2) \in C^1$の場合，$W \succsim R_{AB}$

$(x_2,\ y_2) \in C^2$の場合，$W \succsim R_{AD}$。

これは（A．1），（A．2），（A．4）より明らか。

補題4より，$(x_1,\ y_1) \in A^1_1 \cup A^1_2 \cup A^1_3$を固定したとき，

（A．6） $f_W(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1) = f_{BC}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)$

を満足する点$(x_2,\ y_2) \in C$がWとR_{BC}の境界となる。（A．6）を調べることにより，定理2［I］(a)，(b)，(c)が示される。

次の補題は，出発点が$(x_1,\ y_1) \in A^1_4$の場合も，移動手段は，2つに限定されることを示している。

補題5

$(x_1,\ y_1) \in A^1_4$，$(x_2,\ y_2) \in C$の場合，最適移動手段は，W，R_{AC}の2つに限定される。

証明　補題3より，次の2つの事柄を示せば十分である。

$(x_2,\ y_2) \in C^1$の場合，$W \succsim R_{AB}$

$(x_2,\ y_2) \in C^2$の場合，$W \succsim R_{AD}$。

これは（A．1），（A．2），（A．4）より明らか。

補題5より，$(x_1,\ y_1) \in A^1_4$を固定したとき，

（A．7） $f_W(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1) = f_{AC}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)$

を満足する点$(x_2,\ y_2) \in C$がWとR_{AC}の境界となる。（A．7）を調べることにより，定理2［I］(d)が示される。

$(x_1,\ y_1) \in A^1_5 \cup A^1_6 \cup A^1_7$の場合を調べる前に，次の補題を与えておく。

補題6

出発点$(x_1,\ y_1) \in A^1$を固定する。このとき，次が成立する。

(i) 到達点（x_2, y_2）$\in C^1$に対してR_{AB}が最適であれば，到達点（y_2, x_2）$\in C^2$に対してはR_{AD}が最適である。

(ii) 到達点（x_2, y_2）$\in C^1$に対してR_{AC}が最適であれば，到達点（y_2, x_2）$\in C^2$に対してもR_{AC}が最適である。

(iii) 到達点（x_2, y_2）$\in C^1$に対してWが最適であれば，到達点（y_2, x_2）$\in C^2$に対してもWが最適である。

証明　（A．1）－（A．4）より明らかに，次の関係が成立する。

$$f_{AB}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)=f_{AD}(y_2,\ x_2 \mid x_1,\ y_1)$$

$$f_{AC}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)=f_{AC}(y_2,\ x_2 \mid x_1,\ y_1)$$

$$f_{W}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)=f_{W}(y_2,\ x_2 \mid x_1,\ y_1)。$$

これより明らか。

出発点が（x_1, y_1）$\in A^1_5 \cup A^1_6 \cup A^1_7$，到達点が（$x_2$, y_2）$\in C^1$の場合を調べれば十分である。到達点（x_2, y_2）がC^2の場合，最適移動手段は補題6より直ちに得られるからである。

補題7

到達点（x_2, y_2）$\in C^1$に対して，2つの移動手段R_{AB}とR_{AC}の優劣は次のようになる。

$$R_{AB} \gtrsim R_{AC} \iff (x_2,\ y_2) \in C^1_1$$

$$R_{AC} \gtrsim R_{AB} \iff (x_2,\ y_2) \in C^1_2$$

証明　（A．2），（A．3）より明らか。

補題3(iii)と補題7より，出発点が（x_1, y_1）$\in A^1_5 \cup A^1_6 \cup A^1_7$の時，次のことが容易に分かる。

到達点（x_2, y_2）がC^1_1の時，最適移動手段はW，R_{AB}の2つに限定され，

（A．8）　$f_{W}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)=f_{AB}(x_2,\ y_2 \mid x_1,\ y_1)$

を満足する点（x_2, y_2）がWとR_{AB}の境界となる。同様に，到達点（x_2, y_2）がC_2^1の場合，最適移動手段はW，R_{AC}の２つに限定され，

（A．9）$f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) = f_{AC}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)$

を満足する点（x_2, y_2）がWとR_{AC}の境界となる。

（A．8），（A．9）を調べることにより，定理２［Ｉ］(e)，(f)，(g)が示される。

付録B

$M(x_1, y_1)$ を出発点（x_1, y_1）$\in A^1$を固定した場合の領域Cへの平均移動時間とする。仮定（A３）より到達点は領域Cで一様に分布する，すなわち，到達点（x_2, y_2）は領域C上に一様密度$1/a^2$を持つので，$M(x_1, y_1)$ は（x_1, y_1）の位置に依存して，次のように計算される（図３参照）。

(i)（x_1, y_1）$\in A_1^1$の場合

$$M(x_1, y_1) = \frac{1}{a^2}\int_{(x_2,\ y_2)\in C} f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2$$

(ii)（x_1, y_1）$\in A_2^1 \cup A_3^1$の場合

$$M(x_1, y_1) = \frac{1}{a^2}\int_{(x_2,\ y_2)\in S_{BC}} f_{BC}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2 + \frac{1}{a^2}\int_{(x_2,\ y_2)\in S_W} f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2$$

ただし，S_{BC}，S_Wは（x_2, y_2）の集合で次のように表される。

$$S_{BC} = \left\{(x_2, y_2) : \frac{a}{2}+\frac{a}{2v}+\max\left(y_1, \frac{a}{2}\right) \leqq x_2 \leqq \frac{3a}{2},\ 2a+\frac{a}{2v}-x_2+\max\left(y_1, \frac{a}{2}\right) \leqq y_2 \leqq 2a\right\}$$
$$\cup\left\{(x_2, y_2) : \frac{3a}{2} \leqq x_2 \leqq 2a,\ \frac{a}{2}+\frac{a}{2v}+\max\left(y_1, \frac{a}{2}\right) \leqq y_2 \leqq 2a\right\},$$

$S_W = C - S_{BC}$.

(iii) $(x_1, y_1) \in A_4^1$の場合

$$M(x_1, y_1)=\frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_{AC}} f_{AC}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2 + \frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_W} f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2$$

ただし，

$$S_{AC}=\{(x_2, y_2): x_1+y_1-\frac{a}{2}+\frac{a}{v}\leqq x_2\leqq\frac{3a}{2}, x_1-x_2+y_1+a+\frac{a}{v}\leqq y_2\leqq 2a\} \cup\{(x_2, y_2): \frac{3a}{2}\leqq x_2\leqq 2a, x_1+y_1-\frac{a}{2}+\frac{a}{v}\leqq y_2\leqq 2a\},$$

$$S_W=C-S_{AC}.$$

(iv) $(x_1, y_1)\in A_5^1\cup A_6^1$の場合

$$M(x_1, y_1)=\frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_{AB}} f_{AB}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2 + \frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_{AC}} f_{AC}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2 + \frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_{AD}} f_{AD}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2 + \frac{1}{a^2}\int_{(x_2, y_2)\in S_W} f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1)dx_2dy_2$$

ただし，

$$S_{AB}=\{(x_2, y_2): x_1+\frac{a}{2v}+\max(y_1, \frac{a}{2})\leqq x_2\leqq 2a, a\leqq y_2\leqq a+\frac{a}{2v}\}$$

$$S_{AD}=\{(x_2, y_2): a\leqq x_2\leqq a+\frac{a}{2v}, x_1+\frac{a}{2v}+\max(y_1, \frac{a}{2})\leqq y_2\leqq 2a\}$$

$$S_{AC}=\{(x_2, y_2): a+\frac{a}{2v}\leqq x_2\leqq x_1+\frac{a}{2v}+\max(y_1, \frac{a}{2}), x_1-x_2+a+\frac{a}{v}+\max(y_1, \frac{a}{2})\leqq y_2\leqq 2a\} \cup\{(x_2, y_2): x_1+\frac{a}{2v}+\max(y_1, \frac{a}{2})\leqq x_2\leqq 2a, a+\frac{a}{2v}\leqq y_2\leqq 2a\}$$

$$S_W=C-(S_{AB}\cup S_{AC}\cup S_{AD}).$$

(v) $(x_1, y_1) \in A^1_7$の場合

$$M(x_1, y_1) = \frac{1}{a^2} \int_{(x_2, y_2) \in S_{AB}} f_{AB}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2$$
$$+ \frac{1}{a^2} \int_{(x_2, y_2) \in S_{AC}} f_{AC}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2$$
$$+ \frac{1}{a^2} \int_{(x_2, y_2) \in S_{AD}} f_{AD}(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2$$
$$+ \frac{1}{a^2} \int_{(x_2, y_2) \in S_W} f_W(x_2, y_2 \mid x_1, y_1) dx_2 dy_2$$

ただし,

$$S_{AB} = \{(x_2, y_2) : a + \frac{a}{2v} \leqq x_2 \leqq 2a,\ a \leqq y_2 \leqq a + \frac{a}{2v}\}$$

$$S_{AD} = \{(x_2, y_2) : a \leqq x_2 \leqq a + \frac{a}{2v},\ a + \frac{a}{2v} \leqq y_2 \leqq 2a\}$$

$$S_{AC} = \{(x_2, y_2) : a + \frac{a}{2v} \leqq x_2 \leqq 2a,\ a + \frac{a}{2v} \leqq y_2 \leqq 2a\}$$

$$S_W = C - (S_{AB} \cup S_{AC} \cup S_{AD}).$$

以上より分かるように，$M(x_1, y_1)$ は単純な積分の繰り返しであり，Mathematica 等のソフトを用いて計算するのが効率的である。(i)-(v)より$M(x_1, y_1)$ が得られれば，領域A，C間の平均移動時間$M_{AC}(v)$は再び仮定（A 3）より

$$M_{AC}(v) = \frac{2}{a^2} \int_{(x_1, y_1) \in A^1} M(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

で計算される。これを実行して定理 2［II］の結果を得る。（詳細省略)。

謝辞　研究遂行のため愛知大学研究助成委員会から援助を受けた（共同研究A－5）。この場をかりてお礼を申し上げる。

参考文献

[1] 三浦英俊（1992）：鉄道を有する隣合う2つの正方領域間の平均移動距離。第27回SSOR予稿集，pp.161-164.

[2] 三浦英俊，腰塚武志（1993）：格子状鉄道網を有するク形領域内の平均移動距離。日本OR学会春季発表会アブストラクト集，PP.36-37.