地域政策学ジャーナル
2019，第８巻 第１号第２号合併号(通巻第14号)，25-31

科目を越えた学習特性把握のための数学的理論について[1)]

佐藤　眞久(愛知大学)・加藤　竜哉(桜の聖母短期大学)・湯川　治敏(愛知大学)

On the Foundation of Mathematical Theory to find learning characteristic independent to subjects

Masahisa Sato, Tatsuya Kato, Harutoshi Yukawa

要約：学生・生徒がどのような学習特性を有しているかを知ることは，学習指導の上でも，また，本人の学習指針を作る上でも大切である。従来は，テストや試験の得点を指標として，平均点や偏差値という統計的尺度を参考に学習特性の評価を行っていた。統計的手法では，全体の状況や全体の中での個々の位置を知ることはできるが，理解力や表現力といった学習特性は評価できない。本研究では，代数的手法を用いて，科目を越えた学習特性を抽出し，本人も気づかない隠れた特性も把握できる数学的基礎理論を，具体例を用いて解説していく。

キーワード：学習特性，特性群団，特性ベクトル，代数的手法

１．序章

テストあるいは試験は何の目的で行うのであろうか。入学試験，期末・中間テスト・小テストまたは商用テストで目的は各々異なるが，共に理解度や到達度を測る目的がある点は共通している。しかし，これはテストを実施する立場での目的で，テストを受ける側から見ると，入学試験の方は，合格するかしないかの結果をうるためのものであり，フィードバック（振り返り）を求める類いのものではない。ただし，最近は不合格者にはどの位の位置にいるかを開示する所も多くなり，この点が唯一フィードバックと言えなくもないが，合格まであとどの程度かの位置を知っても学習そのものへの指針を与えるものではない。期末・中間テスト・小テストまたは商用テストには，教師側にとって，当該学生・生徒が全体の中でどのような位置にいるかを把握する目的も含まれている。学生・生徒にも教師側と同じ目的はあるが，さらに，採点済みの答案を振り返ることで，どの内容が理解できているか，あるいは理解が曖昧であったかを知り，今後の勉強の指針を作る目的がある。全体の位置を知るためには，平均点や，偏差値および相関係数などの統計的数値を求め，個人の成績と比較するのが一般的である。また，教科・科目別のテストでは，その教科・科目内での個々の学生・生徒の理解度を把握するために統計処理をして各問の正答率などを算出している。基本的に，統計的手法は全体の中での個々の位置や全体的な理解度などの状況を知ることが目的で，学生・生徒個々人の学習特性をデータとして提供することはできない。例えば，思考の方向性が違う，回り道をする学習傾向を持つといったことを指摘することはできず，正誤のみで決まる得点という指標を示すだけである。答案の分析とこの指標を用いて，何を知り何を改善すべきかを読み取るのは，学生・生徒にとって困難なことが多い。これができる学

１）本研究は，日本学術振興会科学研究費基盤研究（C）課題番号16K01106「教科・科目を横断した学生の共通学習特性の研究 - ビッグデータ解析による実証的検証」の補助を受けたものである。

生・生徒は相当に優秀であると言える。一般的には能力があっても実力が発揮できないのは，主にこの分析が自己評価では難しい点にある。これが統計的手法の限界である。例え分析ができた学生・生徒でも，同一教科・科目内で分析をして，科目を越えて分析をしていることは殆どないであろう。数学のテストから国語力を自己分析することに，学生・生徒は通常は思い至らないであろう。しかし，教科の枠にこだわる必要は本来ない筈である。数学の文章題を読み解く力は，文章の理解力とも共通する特性である。自身の隠された特性を見いだすことは，学生・生徒にとって敷居が高く，解析するための全体のデータもないため，これを学生・生徒に求めることができない以上，テストや試験から得られるデータを活用して，このような学習の特性を学生・生徒に示すことは，テストを実施する側の責任である。しかし，現実問題としてこれが実践されなかった理由としては，教科をまたがった答案の分析や学習特性を見いだす数学的な手法が確立されていない点や，資料の膨大さからビッグデータを扱うことになり，その処理を行うことが難しい点が挙げられる。先に述べたように，従来の統計的手法では，ここではあまり効果が期待できない。全体の位置を知っても学習の改善に役立たない。点数が上位となることを目指す学習は，個人の学力を上げることに必ずしも結びつかない。大事なのは，学習特性を理解した上で，何をどのようにするべきかを考慮して勉学に取り組むことである。この考慮のための基礎データを提供するための基礎研究が本研究報告での内容である。この報告では，学生・生徒の立場に立った分析を提供するための，テストおよび試験から読み取れる学習特性を提供するための手法を解説する。これは統計的手法には馴染まず，代数的手法を用いて可能になるものである。

２．研究目的

大きな目的の一つは教科・科目を超えた学習特性を学生・生徒に示すことである。文章の解説や計算力あるいは学習における得手・不得手といった学生の学習特性は，従来は教科・科目毎にテストあるいは試験結果の統計的分布をもとに当該教科・科目のみに縦割り式に捉えており，教科・科目を横断する特性として捉えることはしていない，していないと言うより，できなかったと言う方が正確かもしれない。しかし，国語における読解力は，数学における問題を誤解なく正確に読み取り内容を理解する上に必要である。解法を正確に記述するためには，論理力もさることながら，表現力も重要である。このように，読解力や表現力は科目を越えた学習特性であり，これらの力を測ることは必ずしも国語の力だけでなく，数学の潜在能力を評価することも可能である。教科・科目のテストあるいは試験においては，問題の正解・不正解に目が行きがちだが，このような学習特性の観点から解答を評価していくことで，当該教科・科目以外の学習特性を引き出すことが可能である。科目横断的にこれらの力を測ることで，いくつものテストや試験を受けなくても理解力や表現力といった学習特性を学生・生徒に示すことができる。今まで，これを行わなかったのは，このような観点でテストあるいは試験の結果を評価しなかっただけで，潜在的にこのような科目横断的学習特性を見いだすデータが内在していたのである。このような学習特性を抽出することができるにもかかわらず，これらを活用しなかったのは，大いなる損失であった。潜在能力を有しながら，テストあるいは試験の点数が伸びないだけで，才能がないと考えてしまった学生・生徒が如何に多かったことであろうか。点数とは切り離して，潜在的に能力があることを示していくことで，方向性を変えるだけで理解が進むであろう可能性を潰してきたと言える。これは教育において，致し方ないとは言え，大いに反省すべきことである。ビッグデータ処理が可能になった現在では，この点を看過してはならいであろう。数学のテストから読解力や表現力といった国語の力を見る例のように，教科・科目を越えた学習特性を捉えていくことが研究の目的で，このための数学的理論の解説と具体的な解析をした例を報告する。

３．代数的手法と統計的手法の違い

テストや試験において，正解・不正解という属性

だけでなく，各問にその問題がどのような力あるいは特性を見ているのかの属性を付けておく。問題の番号順に正解は１，不正解は０，あるいは得点等の値を対応させたベクトルを考える。これを特性ベクトルと呼ぶことにする。このベクトルを用いた代数的考察で学習特性を見いだしていく。

統計的手法での評価で代表的なものは，平均値や偏差値である。これは，個人が全体の中でどの位置にいるかを示している。代数的手法で評価するものは，個人がどのような学習特性を持っているかを指摘するためのものである。この中には，自分では気付かない学習特性や潜在能力の指摘などが含まれる。国語のテストや試験で，論理的な理解力や論理的思考といった学習特性を持つと判断されれば，数学でも論理的に解答が作れる潜在的な力を有していると評価を与えることができる。統計的手法で与えられた結果を見て，数学の成績が振るわないと判断して数学の学習意欲が沸かない，数学や理系科目を不得意と感じてしまうことは，現実にはよくあることである。このような場合，論理的思考ができる特性を有しているとの指摘があれば，学習の気持ちが高まり，教師の適切な指導で具体的に数学的思考の方法を段階的に進める学習に導けば，数学も自然に分かるようになり，誤った認識を元に方向性を踏み誤ることを是正することができるであろう。このような学習特性を自分自身で見いだすのは難しい。一度不得意と思ってしまうと，自身で得意になるまで学習する気力と持続力を保つのは難しい。そこに教師側の働きかけが重要である。むやみやたらに課題や宿題を与えるのが教師の役目でない。医者が症状に応じて薬を処方するように，学生・生徒が持っている学習特性を考慮しつつ，どのような力を伸ばすのか個々に対応する必要がある。このような働きかけがあれば，不得意と思っている科目も，潜在的能力を有しているという自信から継続性を担保でき，克服する気持ちを持続させ，不得手の科目の克服を現実のものとできるであろう。これを実現するには，教師の手作業では時間が不足するため，そこにビッグデータを活用した処理が重要になる。単に，やればできる，と教員が言っても学生はにわかには信じ難いであろう。しかし，データから高い論理的思考力を有していると客観的に示されれば，やる気が喚起されるであろう。まず，個々の学生・生徒の学習特性を見極め，それを客観的なデータとして示すことでやる気を起こすきっかけを与えることが重要である。この点を統計的手法に期待することはできない。大いなる可能性を客観的に示せるのが代数的手法である。

４．数学的基礎理論

ここでは，代数的手法での基礎的考察の理論を記述する。

２つの特性ベクトル a，b の近さ（距離）を，外積の絶対値，すなわち a，b のなす平行四辺形の面積 $|a \times b|$ と決める。a，b のなす角を θ（$0 \leqq \theta < \pi$）とすると，$|a \times b| = |a| \cdot |b| \sin\theta$ より，長さ１のベクトル（$(1/|a|)a$，$(1/|b|)b$ を用いて距離を測ることができる。$a = \mathrm{k}b$ と定数倍になっている関係では，両ベクトルは平行で $\theta = 0$ である。この場合は，大きさが違うだけで，学習特性は同一と考えられる。

前にも述べたように，統計的手法では，全体の中の個人の位置や全体の状況を調べることになる。それに対し，代数的手法では，ある特性を持つ集団（集合）を抽出する。この集団を特性群団と呼ぶ。これにより，教科・科目を越えた特性を見いだし，個人の学習特性の抽出を行う。ここでは，この研究を理解して貰うことに主眼を置くので，従来使われている手法と対比をしながら解説する。本研究で用いるデータは，文科省共同教育推進事業８大学連携[2)]で得られたものであるが，今回はこの一大学の学生のデータのみを使用する。この事業の学修観ワーキンググループでは，個人の特性を抽出するため，様々な角度からの設問に回答をする形式の学修観プレイスメントテストを新入生に実施し，その結

２）研究代表者：小松川浩（千歳科学技術大学），助成期間：2012年－2016年，連携校：千歳科学技術大学，北海学園大学，桜の聖母短期大学，創価大学，山梨大学，愛知大学，愛媛大学，佐賀大学

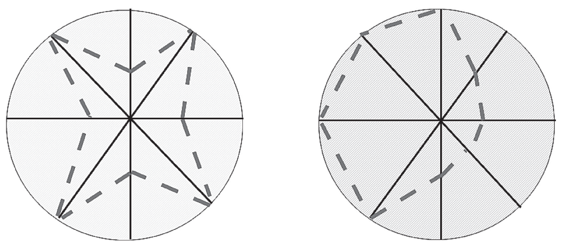

図１．異なって見えるチャート

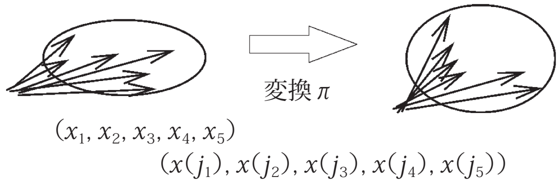

図２．変換で不変な群団

果をレーダーチャートを用いて８つの学修観に関する項目に特性を集約している。この結果と対比させながら，代数的手法の解説をするのが最も分かりやすいと思われるので，この具体例を用いて説明をする。

レーダーチャートでは，出てきた形に注目することが多い。このような形状の学生はこのような傾向がある，と結論を出すことができ，重要なツールである。しかし，図１の２つのチャートを見て欲しい。一つはバランスが良く取れていると感じ，他方は偏った感じに見える。えてして，バランスの良い方が何か良い傾向を持っていると判断しがちである。だが，両者は項目を並び替えただけで，同じ内容を表している。このように，便利な反面，視覚に影響を受けやすい。視覚によらない，すなわち，並べる順番を変えても同じ特性が抽出できるようにすることが必要である。レーダーチャートで特性を評価するとき，例えば，折れ線の形状や折れ線内の面積で類似性を見ようとしても，同じデータを持つ２つのレーダーチャートで折れ線の形状や折れ線内の面積が異なり，同一の評価を与えるのは難しい。すなわち，形状や面積はデータの並べ方に依存してしまい，無意識に並べ方に依存した評価を下していることになり，並べ方の違いで出てくる他の特性を見逃していることになり，総合的に正確な評価を与えることは難しい。その点，ベクトルを用いた代数的考察では，並べ方に依存しない不変量を用いて総合的に正確な評価を与えることが実現できる利点を持つ。もう少し数学的に表現してみる。ほぼ近くに集まっている特性ベクトルの集まりを特性群団と呼んだが，この特性群団は何らかの学習特性を表していると抽象化して考える。

レーダーチャート同様に，並べ方により群団が崩れるようでは，これは特性を表しているとは言えない。並べ方を変えるということは，ベクトルの成分の座標の並べ方を変えることで，線形代数学の言葉で言えば，座標の入れ替え（直行座標変換）であり，これにより群団が群団として移っていなければならない。すなわち，ベクトル$x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$に対して，$\pi$を１から$n$までの置換で$\pi(i)=j_i$としたとき$\pi(x)=(x(j_1),\ x(j_2),$・・，$x(j_n))$に関する変換で群団$\{x\}$が群団$\{\pi(x)\}$に移っている必要がある（図２）。

また，群団に対する特性値は，変換πに対する不変量でなければならない。特性値とは，数学的には群団Ａから実数の集合Ｒへの関数f：Ａ→Ｒのことである。このfが変換πに対する不変量であるとは，$f(x)=f(\pi(x))$を満たしているときを言う。統計学での平均や分散などは特性値である。

５．相関と特性群団

統計での相関は，代数的にどのように記述されるのかを見てみる。ある２つの量に相関があるとは，各量を平面上の座標に持つ点が，図３のようにある直線の回りに点が集まっていることである。図３では便宜上，原点を通る直線としたが，一般には原点を通る直線でなくてもよい。この直線にまとわりつく点は互いに相関があると統計では考える。この集合が一つの特性群団でもある。これを数値化して求めるにはどのようにすれば良いか考える。この直線上の長さ１の方向ベクトルを基準ベクトルと呼ぶ。ここでは２次元なので，基準ベクトルをａ$=(a,\ b)$とおく。この群団にあるベクトルを，$x=(x_1,\ x_2)$とし，長さ１に正規化したベクトルを$y=(1/|x|)x$

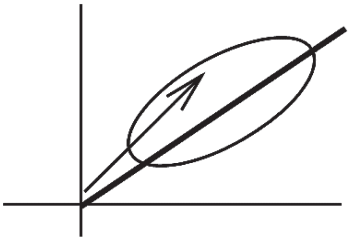

図３．特性群団

とする。２つのベクトルが近くにあるとは，両ベクトルのなす角θが小さいことである。θは一種の普遍定数である。実際のデータが与えられたとき，θがどの範囲にあれば群団を成しているかについて詳細に検討する必要がある。この普遍定数の決定には，数学的理論を展開しながら多くの事例を重ねて決定していく必要があり，今後の研究の大きな課題である。この点に関しては，本研究報告が検証の意味も込めての説明でもあるので，議論をわかりやすくするため，任意の２つのベクトルのなす角を考える代わりに，基準ベクトルとのなす角を考え，この角が小さい値をとる場合の群団について説明していく。

前半で面積，すなわち，外積を用いてθを求めた。長さ１の２つのベクトルa，bでは，外積は$|a\times b| = \sin\theta$，内積は$a\cdot b = \cos\theta$となり，サインとコサインの値が求まる。どちらが実際の計算では利用しやすいであろうか。サインでは$\sin\theta$の値が１に近いほど，コサインでは$\cos\theta$の値が０に近いほど相関が大きい，群団の言葉で言えば，特性群団に属しているということになる。本研究報告では，aを基準ベクトルに固定し，bを群団に属するベクトルとして，外積や内積を特性値関数fとして考える。これは，当然，変換πに対する不変量である。

６．具体例での考察

特性群団の特定に関する数学的手法について，上記の考え方にしたがって，具体例を用いて考察し解説する。先に紹介した文科省共同教育推進事業８大学連携において，学修観に関するプレイスメントテストを７年間継続して実施し，膨大なデータが蓄積されている。この中で確認された特性に関して，上記の研究手法で学習特性を見いだす手法の観点から検証し，一つの特性群団として認識されているか追認し理論の信頼性の高さも確認したい。さらに，これも先に述べたように，特性群団として認定するには，近さ，すなわち２つのベクトルの偏角θがどの位の範囲で収まる必要があるか，という今後の研究を推進する上での目安としたい。学修観プレイスメントテストの種々の設問から，訓練指向（I），実用指向（J），関係指向（K），自尊指向（L），報酬指向（M），充実指向（N）という６つの指向に個人の持つ指向の割合を数値化できることが分かっている（参考文献：小塩）。これを正６角形上のレーダーチャートに図形化して学生の学修観の状況や特徴を記述して，学生に結果を還すと共に教員が学生の特性を把握し教育に活かしている。このレーダーチャートから種々の学習特性を読み取ることができるが，先に述べたように並べ方により図形が異なり，並べ方を変えることで，さらに隠れた学習特性を見いだせる可能性がある。本研究報告では，その前段階の検証を主眼におくので，この学習特性全体の抽出については，詳細な数学的説明が必要なため取り上げないことにする。興味ある諸氏はいろいろな分野で学習特性の抽出を行って具体例を積み上げて欲しい。

まず，６つの指向で，多くのデータのレーダーチャートを見ると｛N，Ｉ，J｝と｛K，L，M｝は相互補完的であることが見て取れる（共著者・加藤の発見）。この点を本研究の手法で調べてみる。相互補完的であるということを，本研究の言葉で表すと，ベクトル（N，I，J）の集合とベクトル（K，L，M）の集合は，基準ベクトルを用いた特性値$|a\times b|$に対し同一の特性群団をなしており，この特性群団が一つの学習特性を表している，ということになる。本研究では，本来は膨大なデータ（ビッグデータ）からこの特性群団を抽出するべきものであるが，先ほども述べたように，検証を目的にするので，目的は逆転するが，本研究の意味を理解して貰うために，この結果を本研究の手法で追認してみる。なお，ここで用いているデータは，８大学連携

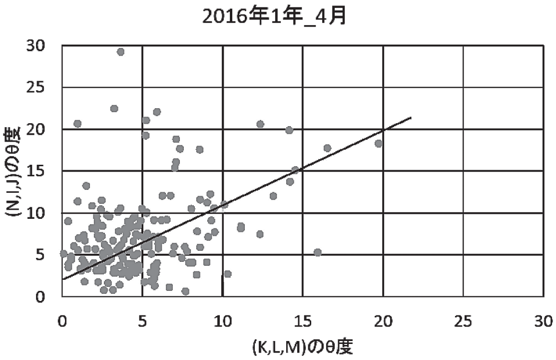

図４．2016年度入学生の学修観の偏角

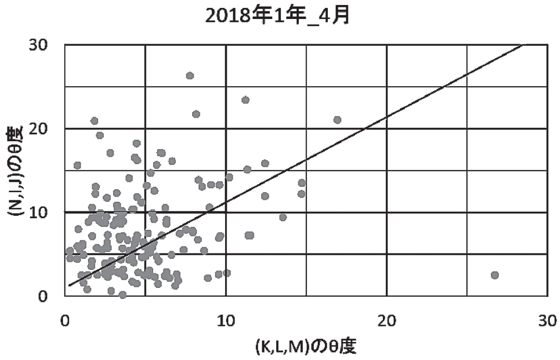

図６．2018年度入学生の学修観の偏角

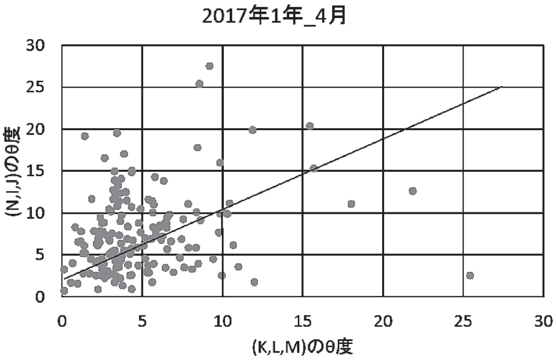

図５．2017年度入学生の学修観の偏角

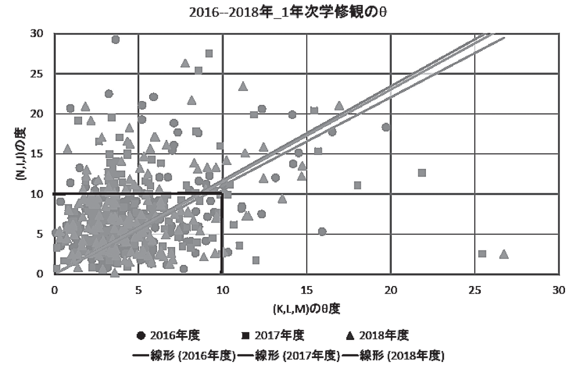

図７．2016－18年度入学生の学修観の偏角

のある一大学の学生３年分のデータである。

最初に，ベクトル（N，I，J）の集合が特性群団を成しているか考察する。先に述べたように，本来はこの集合の任意の２つのベクトルがなす角を使うべきだが，簡便のために基準ベクトルを設け，この基準ベクトルとなす角が非常に小さくなっているかを調べることで検証を行う。基準となるベクトル a としては，それぞれの成分の平均値を用いることにする。データのベクトル b とのなす角 θ は外積を用いて $|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\theta$ の式から求めるのが自然であるが，３次元以上の２つのベクトルの外積を求めるには，この２つのベクトルが属する３次元座標を作り計算する必要があるので，$(|a|^2\cdot|b|^2)\sin^2\theta=|a|^2\cdot|b|^2-(a\cdot b)^2$ を用いることにする。ここで用いる例は３次元であるのでどちらを計算しても同じであるが，通常はデータのパラメータは膨大で高次元のデータを扱うことが殆どなので，この点を考慮して，導入した座標系をそのまま用いることができる内積を用いて記述しておく。2016年度の（N，I，J）の基準ベクトルとして，正規化しないで平均点のなすベクトル $a=(66,\ 62,\ 74)$ を用いる。１つのデータ $b=(\mathrm{N},\ \mathrm{I},\ \mathrm{J})=(80,\ 77,\ 97)$ をとると，$|a|^2=13676$，$|a|=116.9444$，$|b|^2=21138$，$|b|=145.3891$，$|a\times b|^2=421320$，$|a\times b|=649.0916$, $\sin\theta=0.0716$，$\theta=2.668°$ となる。（K，L，M）の基準ベクトルとして，平均点からなるベクトル（54，59，59）をとり，同様な計算を行う。両者の関係（相関）をとると図４の相関図が得られる。基準ベクトルに対し10°以内に入っている集合が一つの群団を成しており，これにより両者が一つの特性群団を示していることが見て取れるであろう。なお，図７に３年間の全ての相関図を，図８に2016年度入学生のヒストグラムを載せておく。

2017年と2018年も図５，６のようになり，10°以

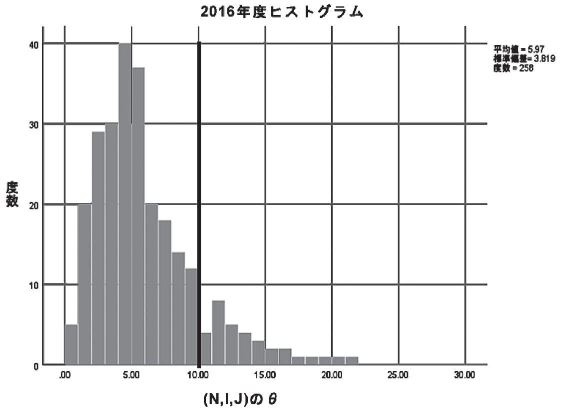

図８．2016年度入学生のヒストグラム

内の集合が一つの群団を成していることがわかるであろう。これらは何らかの理由で互いに影響し合っていることがわかり，これがどのような学習特性を持つのか調べ，既存の特性にないものであれば，新しい特性として名称を与えて，学生にどのような影響を与えているものであるかを調べていく必要がある。実際，ビッグデータから学習特性を抽出すれば，相当数の未知の特性が捉えられるであろう。これらは，天文学で言えば未知の天体の発見であり，物理であれば新たな素粒子の発見に対応するエクサイティングな研究である。なお，図４，５，６の相関図で大きく外れた点（外れ値）に位置する学生が毎年一定割合いることがわかる。この学生を実際調べると，何らかで生活上の指導を受けている学生であることがわかった。しかし，これらはレーダーチャートでは１年次に抽出ができない学生であった。特性群団が示す何らかの学習特性に欠けていることが原因で高学年になり指導が必要な状態になったのであろうと想像される。将来指導が必要になると，１年次の入学段階で予想できる点は，学習特性の抽出という課題に加えて重要な点で，適切な指導を行えば高学年でのつまずきを予防できる可能性を秘めている。いわば，予防医学のようなもので，発症する前に予防接種を受けるなり適切に治療を受ければ病気を発症せずに済むことに対応するものであろう。このような可能性も本研究で今後探っていきたい。

７．まとめ

統計的手法で全体的な状況把握を行い個々人の全体に対する位置を確認する従来の学習状況の把握では，個々人の持つ特性を十分に検証することができない。個人の可能性を秘めた学習特性の把握は，偏差値や成績では表面に現れないため，代数的手法を用いて，教科・科目の枠を越えて調べる必要がある。この点が本研究の核心で，その考え方や手法の解説を本研究報告では，８大学連携学修観ワーキングで実施しているデータを用いて行った。代数的手法を用いた本研究では，学習特性を特性群団として捉えている。このような本研究での数学的基礎理論の基本的考え方を理解いただければ幸甚である。今回は，わかりやすさを優先するため，簡素化して特性群団を調べたが，全ての学習特性を調べるためには，ビッグデータ処理が必要で，今後これを取り扱いながらこの研究を進めていく。本文中にも書いたように，そのために近さの基準となるベクトルのなす角 θ である普遍定数の決定も重要な研究テーマである。多くの研究者の方々が興味を持って，この数学的理論を発展させていただき，様々な事例を積み上げていただければこの上ない喜びである。

参考文献：

市川伸一（1998）『認知カウンセリングから見た学習方法の相談と指導』ブレーン出版社

小塩真司，中谷素之，金子一史，長峰信治（2002）「ネガティブな出来事から立ち直りを導く心理的特性：精神的回復力尺度の作成」『カウンセリング研究』第35巻第１号，57－65

加藤竜哉（2014）『８大学連携の学修観アンケートを用いた解析と学びの特徴抽出の試み』大学ｅラーニング協議会８大学間連携共同教育推進事業合同フォーラム（2014年３月），ｅラーニング協議会

平成24－26年度文部科学省大学間連携共同教育推進事業中間報告書（2015）『学士力養成のための共通基盤システムを活用した主体的学びの促進』，文部科学省